

☆ 要點：最短路徑問題的演算法比較

演算法	Dijkstra	Bellman-Ford	Floyd-Warshall	Johnson
問題類型	single source	single source	all-pair	all-pair
演算法類別	Greedy	Dynamic Programming	Dynamic Programming	Greedy and Dynamic programming
negative edge(s)	×	○	○	○
negative cycle	×	×	×	×
資料結構	鄰接串列， Fibonacci Heaps	鄰接串列	鄰接矩陣	鄰接串列， Fibonacci Heaps
時間複雜度	$O( V \log V + E )$	$O( V \times E )$	$O( V ^3)$	$O( V  E + V ^2\log V )$

精選例題 55

- (1) 請說明如何用圖形(Graph)表示台灣的交通路線。
  - (2) 如把台灣全島的交通路線，表示在同一份資料結構上，其資料量大而複雜，解決的方法為分層表示，請問該如何分法？並請說明理由。
  - (3) 如要找由台北市政府到高雄市政府的最短路線，應如何找法，請大略說明。
- 89第一次專技人員

解答：(1) 以頂點來表示地點，以邊來表示兩地點之間的道路，且以邊的長度(加權值)來表示兩點之間的距離。若兩點之間沒有道路存在，則以  $\infty$  來表示。

- (2) 若圖形的表示法採用 adjacency list，則未必需要使用分層表示。

若以adjacency matrix時，分層確有必要，分層方法可以如下：在最上層以每一個縣為一頂點，建立縣與縣之間的道路關係圖形，此為最上層之圖形；然後，每一個縣再建立該縣內部鄉與鄉之間的道路關係圖形；然後在鄉內部再建立圖形，以此類推。

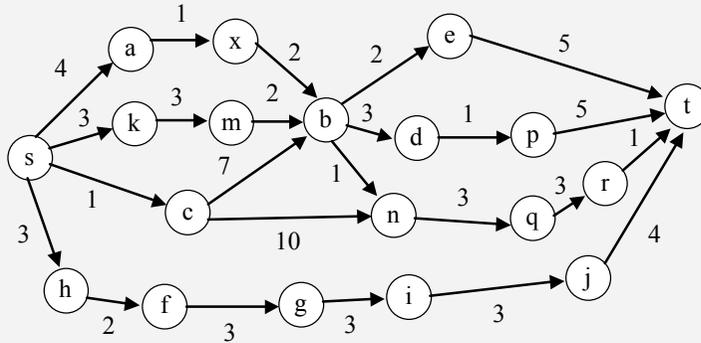
如此可以節省所需的空間，若共有m個縣，平均每個縣有n

個鄉，使用單層的adjacency matrix需要空間為 $O(m^2n^2)$ ；若分成兩層，則空間降為 $O(m^2+mn^2)$ 。

(3) 使用 Dijkstra's algorithm。

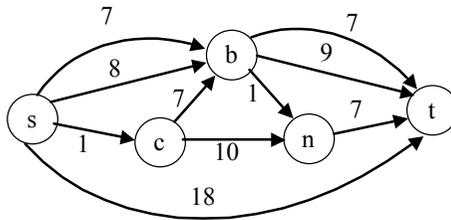
**精選例題 56**

下圖中的邊都附有權值(weight)。圖中路徑(path)的長度為其中所有邊權值的總和。列出下圖所有從 s 點出發，到 t 點的最長路徑。



92交通事業公路人員升資

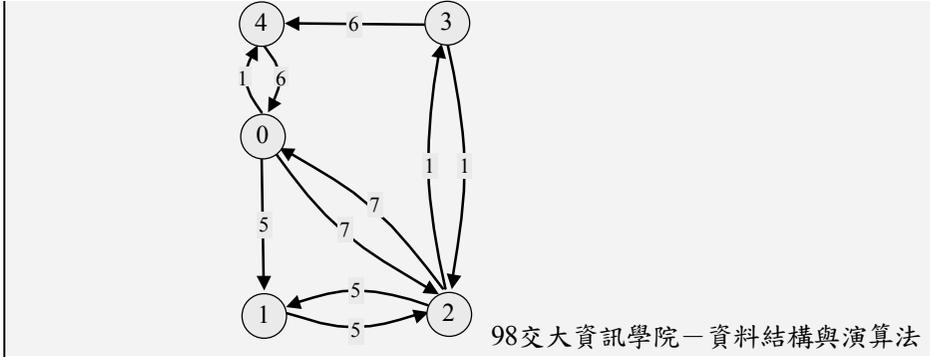
解答：可以先將圖化簡如下：



最長路徑有兩條： $s \rightarrow h \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow i \rightarrow j \rightarrow t$  與  $s \rightarrow c \rightarrow n \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow t$ 。

**精選例題 57**

令 $A^k[i][j]$  表示由頂點 i 到頂點 j 的最短路徑長度，但中間不能經過編號大於 k 的頂點。請針對下圖找出其  $A^1$  矩陣。



98交大資訊學院—資料結構與演算法

解答：

$$A^{-1} \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 & \infty & 1 \\ \infty & 0 & 5 & \infty & \infty \\ 7 & 5 & 0 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 6 \\ 6 & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A^0 \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 & \infty & 1 \\ \infty & 0 & 5 & \infty & \infty \\ 7 & 5 & 0 & 1 & 8 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 11 & 13 & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

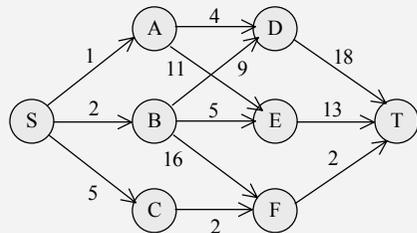
$$A^1 \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 & \infty & 1 \\ \infty & 0 & 5 & \infty & \infty \\ 7 & 5 & 0 & 1 & 8 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 11 & 13 & \infty & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

**精選例題 58**

請使用 dynamic programming 方式找出下圖從 S 到 T 的最短路徑長度。

提示：使用 Forward Reasoning，例如

$$D(S,T) = \min \{ d(S,D) + 18, d(S,E) + 13, d(S,F) + 2 \}$$



97嘉義資管所

解答：  $d(S,S) = 0$

$$d(S,A) = \min \{ d(S,S) + 1 \} = 1$$