當 $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$，必有 $\left|\sqrt{2x+1} + 2x - (6+\sqrt{7})\right| < \varepsilon$

1.4 極限的應用

1.4.1 連續複利

極限在財務方面的最常見的應用爲連續複利（compounded continuously）。所謂的複利，即爲第一期的本利和爲第二期計算利息的本金。舉例說明：當給定年利率 r、期初存入本金 P 且一年複利 n 期時，則利率爲 $\frac{r}{n}$ 且第一期的本利和爲 $P(1+\frac{r}{n})$，此即爲第二期計算利息的本金，因此第二期的本利和爲 $[P(1+\frac{r}{n})]\cdot(1+\frac{r}{n}) = P(1+\frac{r}{n})^2$，而一年複利 n 期的本利和爲 $P(1+\frac{r}{n})^n$。至於所謂的連續複利，爲 n 趨近無窮大的情況，即 $\lim\limits_{n\to\infty} P(1+\frac{r}{n})^n$，又我們知道 $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 故 $\lim\limits_{n\to\infty} P(1+\frac{r}{n})^n = Pe^r$，此即爲連續複利的一般式。

試題 1

Find the tripling time for money invested at P percent compounded continuously.（97元智企研）

Sol：

假設期初存入本金 A

$$\Rightarrow Ae^{\frac{Pt}{100}} = 3A \Rightarrow \frac{Pt}{100} = \ln 3 \Rightarrow t = \frac{100\ln 3}{P}$$

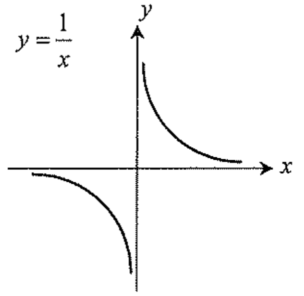
1.4.2 連續性

所謂的連續性，顧名思義，就是沒有中斷的意思。判斷連續性的方法很簡單，我們知道 $f(x)$ 在 a 點極限存在的條件為： $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ，而當 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$（左極限等於右極限等於代入值）時，則 $f(x)$ 在 a 點連續。故可得知

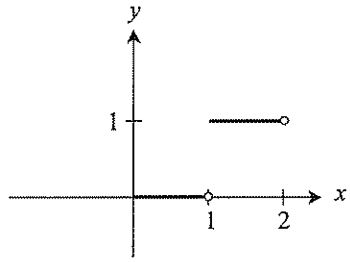
$$\text{極限存在} \underset{\text{一定}}{\overset{\text{不一定}}{\rightleftarrows}} \text{連續}$$

至於不連續的種類有以下三種：

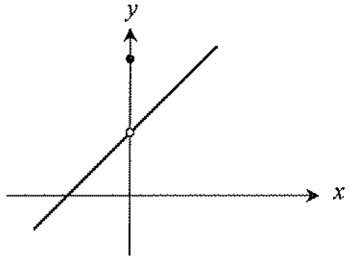
1. 無窮不連續：即 $f(a)$ 不存在，例如： $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在點 $x=0$ 不存在，故不連續。



2. 跳躍不連續：即 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在，例如： $\lim\limits_{x\to 1}[x]$ ，[ ]表高斯函數。



3. 可移去不連續：即 $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$，例如：$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$



Attention.

多項式必處處連續，例如：$ax^3+bx^2+cx+d=e$ 其中 $a\sim e$ 為任意常數。

試題 2

Assume that

$$f(x)=\begin{cases} -1, & \text{if } x\le 0 \\ \alpha x+\beta, & \text{if } 0<x<1 \\ 1, & \text{if } x\ge 1 \end{cases}$$

Determine the value of α and β such that $f(x)$ is continue.

（94政大風管）

Sol：

由題知 $f(x)$ 連續

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x) \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \end{cases} = \begin{cases} -1=\beta \\ \alpha+\beta=1 \end{cases} \Rightarrow \alpha=2，\beta=-1$$

試題 3

設函數 $f(x)=\begin{cases} 4x, & x\le -1 \\ ax+b, & -1<x<2 \\ -5x, & 2\le x \end{cases}$，試求 a 及 b 值，使得 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ 上連續。

（90淡江企研）

重點補充 Focus Supplement

重點一

求切線、曲線夾角——法向量法：

若函數$F(x,y)=0$，欲求通過函數上點(a,b)的切線，則該切線為

$[F_x(a,b)]x+[F_y(a,b)]y=[F_x(a,b)]a+[F_y(a,b)]b$

且向量$(F_x(a,b),F_y(a,b))$為函數在點(a,b)的法向量，可利用夾角公式求兩曲線之間的夾角（第五章說明）。

問題

Find the tangent line of the curve $(x^2+y^2)^2=(x-y)^2$ at $(1,-1)$.

（94清大科管）

【模擬解析】

令$F(x,y)=(x^2+y^2)^2-(x-y)^2$

$\Rightarrow F_x(1,-1)=4x(x^2+y^2)-2(x-y)|_{(x,y)=(1,-1)}=4$

$F_y(1,-1)=4y(x^2+y^2)+2(x-y)|_{(x,y)=(1,-1)}=-4$

則切線爲

$[F_x(1,-1)]x+[F_y(1,-1)]y=[F_x(1,-1)]\cdot 1+[F_y(1,-1)]\cdot(-1)$

$\Rightarrow 4x-4y=8\Rightarrow x-y=2$

重點二

曲率（curvature）：

曲線上一點$P(a,b)$的曲率k為：

(1)參數曲線：$x=x(t),y=y(t)\Rightarrow k=\dfrac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{\{(x'(t))^2+(y'(t))^2\}^{\frac{3}{2}}}$

(2)函數曲線：$y=f(x)\Rightarrow k=\dfrac{|y''|}{\{1+(y')^2\}^{\frac{3}{2}}}$

問題

令 $P(1,\sqrt{2})$ 為橢圓 $\Gamma=\left\{(x,y)\middle|\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1\right\}$ 上的一點

(1)求在 P 點上的單位法向量。

(2)求在 P 點上橢圓的曲率（curvature）。　（93交大科管）

【模擬解析】

(1)令 $F(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1$，

故法向量 $=(F_x(a,b),F_y(a,b))=(x,\dfrac{y}{2})\Big|_{(x,y)=(1,\sqrt{2})}=(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$

單位法向量 $\dfrac{1}{\sqrt{1^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}\left(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(2)令 $x=\sqrt{2}\cos\theta, y=2\sin\theta\Rightarrow(x,y)=(1,\sqrt{2})$ 時 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x'=-\sqrt{2}\sin\theta, x''=-\sqrt{2}\cos\theta$ ； $y'=2\cos\theta, y''=-2\sin\theta$

$$\Rightarrow k=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{\left\{(x'(t))^2+(y'(t))^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\left|\left(-\sqrt{2}\sin\theta\right)\left(-2\sin\theta\right)-\left(-\sqrt{2}\cos\theta\right)\left(2\cos\theta\right)\right|}{\left\{\left(-\sqrt{2}\sin\theta\right)^2+\left(2\cos\theta\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

試題演練
Question practice

1. 設 f 及 g 為可微分函數，滿足 $f(g(x))=x$ 及 $f'(x)=1+[f(x)]^2$，則 $g'(x)=?$ （90台大財金）

2. The derivate of y^n with respect to y^3 is

   (A) $\frac{n}{3}y^{n-3}$ (B) ny^{n-3} (C) $3ny^{n-3}$ (D) $3ny^{n+1}$ (E)does not exist.

   （90成大國企）

3. Find $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=?$ （97中興財金）

4. A liquor warehouse expects to sell D bottles of scotch whiskey in a year. Each bottle costs $\$P$, plus a fixed charge of $\$F$ per order. If it costs $\$H$ to store a bottle for a year, how many orders should the warehouse place in a year to minimize inventory cost? （94政大企研）

5. 笛卡兒葉形線 $x^3+y^3-3xy=0$ 在 $(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$ 之切線斜率＝？ （89台大商研）

6. 設函數 f 滿足 $f(a)=0$ 並且 $f'(a)=3$，則 $\lim\limits_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$ 的值為何？

   （92台大）

7. $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln(\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}}{2})=?$ （89清大科管）

8. A circle of radius 1 with center on the y-$axis$ is inscribed in (內切於) the parabola $y=x^2$. The points of intersection are? （89清大科管）

9. 某遊覽公司，依其營業經驗，當每人收費9元時，則每天平均有乘客1,000人；當每人收費7元之時，則每天平均有乘客1,500人；假若乘客需求函數是線性的，則每人收費多少時，才可使得每日的票箱收入為最大？ （89中央資管）

10. Graph $y=4x-1+\frac{3}{x-1}$ and locate all extreme points and determine if they are relative maximum or relative minimum points. （88政大財政）