主題三　套利訂價理論

出題頻率：◈◈◇◇◇

重點提示

㈠套利投資組合（Arbitrage Portfolio）：乃為一無風險、無投資成本且能賺取利潤的投資組合，其必須同時符合三個條件：

1. 套利的過程並不改變原先所承受的風險。

2. 無需額外資金的投入。

3. 可以創造正的報酬。

㈡套利訂價理論（APT）：提出多個風險因素來解釋證券的報酬率，即證券報酬率為多個因素的線性函數，又稱為多因子模式。在無套利投資組合的假設下，APT可寫成以下的形式：

$$R_i = E(R_i) + b_{i1} \times F_1 + b_{i2} \times F_2 + \cdots\cdots + b_{in} \times F_n + \varepsilon_i$$

或：$E(R_i) = R_f + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2} + \cdots\cdots + \lambda_n b_{in}$

3-1　套利限制　Intermediate

Arbitrageurs may be unable to exploit behavioral biases because of ______. (Ⅰ) capital constraint (Ⅱ) implementation costs (Ⅲ) fundamental risk (Ⅳ) low analyst coverage (Ⅴ) high market liquidity

(A) Ⅰ and Ⅱ　　(B) Ⅰ, Ⅱ, and Ⅲ

(C) Ⅰ, Ⅱ, and Ⅳ　　(D) Ⅱ, Ⅳ, and Ⅴ

(E) Ⅲ, Ⅳ, and Ⅴ.

【台大財金】

(B)；

套利的限制包括：

㈠基本面風險（fundamental risk）：係指當證券低估（高估）時買進

（賣出）後，證券扭曲的程度更大，即更加低估（高估）時，投資人可能不得不了結部位，無法及時獲利的風險。

㈡執行成本（implementation costs）：如放空證券的手續費、證券放空與回補的限制、資金不足以持續套利的資金限制（capital constraint）等。

㈢模型風險（model risk）：指評價模式錯誤致套利產生風險。

3-2 單因子APT模式 Easy

Consider the one-factor APT. Assume that two portfolios, A and B, are well-diversified. The betas of portfolios A and B are 1.0 and 1.5, respectively. The expected returns on portfolios A and B are 19% and 24%, respectively. Assuming no arbitrage opportunities exist, the risk-free rate of return must to:

(A)4.0% (B)9.0%

(C)14.0% (D)16.5%

(E)None of the above. 【政大金融】

(B)；

$$E(R_i) = R_f + \lambda_1 b_{i1}$$

$$\begin{cases} 19\% = R_f + \lambda_1 \times 1 \\ 24\% = R_f + \lambda_1 \times 1.5 \end{cases} \quad 可得：R_f = 9\%，\lambda_1 = 10\%$$

3-3 兩因子APT Easy

假設今有一投資者面臨A、B兩種證券的投資組合，而影響該兩種證券的因素只有兩種，個別因素對證券報酬的敏感度（sensitivity）如下表所列。假設投資者賣掉$2的A證券，改買B證券同時增加$1投資B證券，則下列敘述何者為真？①第一個因素改變對投資組合的報酬的影響為1；②第一個因素改變對投資組合的報酬的影響為0.5；③第二個因素改變對投資組合的報酬的影響為0.5；④第二個因素改變對投資組合的報酬的影響為0。

證券＼敏感度	b_{j1}	b_{j2}
A	0.4	0.6
B	0.6	0.4

(A)①③ (B)①④

(C)②③ (D)②④。【銘傳財金與風管】

(B)；

$W_A=-2$ ，$W_B=3$

$b_{j1}=-2\times0.4+3\times0.6=1$

$b_{j2}=-2\times0.6+3\times0.4=0$

3-4 兩因子APT模式 Intermediate

王小姐為一基金經理人，她的基金β值為1.2，無風險利率為8%，市場投資組合期望報酬率為12%。王小姐由APT（Arbitrage Pricing Theory）得知，證券報酬率由經濟成長率與未預期通貨膨脹率決定，所以：

$$E(R_1)=\lambda_0+\lambda_1 b_{i1}+\lambda_2 b_{i2}$$

式中，b_{i1}、b_{i2}分別為該證券對經濟成長率與未預期通貨膨脹率之敏感度，$\lambda_1=6\%$，$\lambda_2=10\%$。假設CAPM與APT均成立且市場效率，請問：

㈠λ_0為多少？

㈡如果王小姐的基金對經濟成長率敏感度b_{i1}為0.5，則此基金對未預期通貨膨脹率敏感度b_{i2}應為多少？

㈢如果王小姐調整她的投資組合，對經濟成長率敏感度b_{i1}上升為0.6，但未預期通貨膨脹率之風險降為0，即$b_{i2}=0$，則新的投資組合期望報酬率為若干？此新的投資組合β值應為多少？

【高科大金融】

㈠ $\lambda_0=R_f=8\%$

㈡由於CAPM成立，即：

$E(R_i) = R_f + [E(R_m) - R_f] \times \beta_i$

$= 8\% + [12\% - 8\%] \times 1.2 = 12.8\%$

又APT成立，即：

$E(R_i) = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2}$

$12.8\% = 8\% + 6\% \times 0.5 + 10\% \times b_{i2} \Rightarrow b_{i2} = 0.18$

㈢ $E(R_i) = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_{bi2}$

$= 8\% + 6\% \times 0.6 + 10\% \times 0 = 11.6\%$

$E(R_i) = R_f + [E(R_m) - R_f] \times \beta_i$

$11.6\% = 8\% + (12\% - 8\%) \times \beta_i \Rightarrow \beta_i = 0.9$

3-5 兩因子APT Intermediate

In a rational capital market, any systematic difference in the expected (average) returns of two securities must be a result of different exposure of the securities to economic risks. Suppose that all such risks are captured by a two-factor model. Their risk premia are 3% and 6%, for factor 1 and 2, respectively. The T-bill rate is 4%. Consider the following two securities:

$E(r_A) = r_f + 0.2(F_1 - r_f) + 1.2(F_2 - r_f)$

$E(r_B) = r_f + 0.8(F_1 - r_f) - 0.4(F_2 - r_f)$

㈠What are the expected returns of the securities? What are the expected returns of the factors?

㈡You decide to invest \$1,000 in security A and \$3,000 in security B. What is the expected return of the portfolio? Using the above APT-relation, what are the factor loadings (sensitivities) of the portfolio to both factors? When would you like to construct such a portfolio-illustrate with a real-world example? 【台科大財金】

㈠ $E(r_A) = 4\% + 0.2 \times 3\% + 1.2 \times 6\% = 11.8\%$

$E(r_B) = 4\% + 0.8 \times 3\% - 0.4 \times 6\% = 4\%$

$F_1 - r_f = F_1 - 4\% = 3\% \Rightarrow F_1 = 7\%$

$F_2 - r_f = F_2 - 4\% = 6\% \Rightarrow F_2 = 10\%$

㈡ *1.* $E(r_P)=\frac{1}{4}\times 11.8\%+\frac{3}{4}\times 4\%=5.95\%$

2. $E(r_P)=\frac{1}{4}E(r_A)+\frac{3}{4}E(r_B)$

$$=\frac{1}{4}[r_f+0.2(F_1-r_f)+1.2(F_2-r_f)]+$$

$$\frac{3}{4}[r_f+0.8(F_1-r_f)-0.4(F_2-r_f)]$$

$$=r_f+0.65(F_1-r_f)$$

即F_1之敏感係數爲0.65，F_2之敏感係數爲0。換言之，A、B證券受F_2之影響方向相反，該投資組合剛好抵銷了F_2風險因子。例如，利率上升對營建業不利，但對銀行、保險業有利；或匯率升值對出口商不利，但對進口商有利，適當的組合可以抵銷此一風險。

3-6　比較CAPM與APT　Hard

下列有關資本資產訂價理論（CAPM）及套利訂價理論（APT）比較之敘述，何者有誤？

(A)APT主張資產均衡報酬率可以由多個風險因素決定，CAPM則主張資產均衡報酬率僅由單一個風險因素決定

(B)在模型構建過程中，APT不須對資產報酬率隨機變數之機率分配做假設；而CAPM則須假設資產報酬率隨機變數之機率分配為常態分配（或對稱分配）

(C)在模型構建過程中，APT不須對市場投資組合做處理；而CAPM則須假設市場投資組合必須位於效率前緣上

(D)套利訂價理論僅是資本資產訂價模式之一種特例

(E)APT的實證研究對資產均衡報酬率中風險因素無法明確認定，而CAPM的實證研究對資產均衡報酬率中系統風險因素，則可明確衡量。　【台大財金、銘傳財金】

(D)；

資本資產訂價模式僅是套利訂價理論之一種特例，套利訂價理論則爲一般式。

3-7 比較CAPM及APT Hard

試比較CPAM及APT理論。在分散投資組合要求上，何者較佳？理由為何？ 【暨南財金、南華財管、朝陽財金、淡江金融、銘傳財金】

㈠比較CAPM與APT理論：

1. 資本資產訂價模式：由Sharpe、Linter、Treynor、Mossin等人提出的資本資產訂價模式（CAPM），在描述個別證券或投資組合的預期報酬率與其系統風險間的關係；系統風險愈高，則個別證券或投資組合的預期報酬率也愈大。資本資產訂價模式中，說明了投資人唯有承擔系統風險，才享有風險溢酬，而非系統風險由於可以充分分散之，故無法獲得風險溢酬。最後將資本資產訂價模式繪於圖上，即是證券市場線。其方程式如下所示：

$$E(R_i) = R_f + [E(R_m) - R_f] \times \beta_i$$

其中：$E(R_i)$ ＝第i種證券之預期報酬率

$E(R_m)$ =市場投資組合報酬率

β_i ＝第i種證券的貝他係數

R_f ＝無風險利率

上式中，我們稱$[E(R_m) - R_f]$爲市場風險溢酬，此爲投資人承擔市場風險所獲得的補償，亦爲證券市場線的斜率項。再將市場風險溢酬乘以個別證券或投資組合之β係數，則爲該個別證券或投資組合之風險溢酬，β係數愈大，其風險溢酬也愈高。最後，個別證券或投資組合之預期報酬率即由「無風險利率」與「風險溢酬」所構成。