§1. 矩陣的基本性質

1 定義:《矩陣》

① 將mn個數排成一個m列n行的長方形就稱爲一個尺度(*size*)$m\times n$的矩陣(*matrix*). 這mn個數用方括號或圓括號左右括起來.

② 若構成矩陣的每個數都是實數就說這矩陣是實數矩陣，或稱爲佈於實數系的矩陣. (a matrix *over* $\mathbb{R}$)

③ 所有$m\times n$實數矩陣所形成的集合記爲$\mathbb{R}^{m\times n}$，即

$$\mathbb{R}^{m\times n}=\left\{\left.\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\right|\ a_{ij}\in\mathbb{R}\right\}.$$

$\mathbb{R}^{m\times n}$內的矩陣常簡記爲$[a_{ij}]_{m\times n}$ 或 $[a_{ij}]$.

④ 兩矩陣相等的意思是尺度相同，且每個對應位置都相等.

【要訣】(1) 矩陣的橫排稱做列(*row*)，縱排稱爲行(*column*)，讀英文版線性代數的同學首先應辨明此二字.

(2) 矩陣的單數形是matrix，多數形是matrices.

(3) 描寫矩陣的尺度(size)時，先講高度(即列數)，再講寬度(即行數). 尺度2×3是表示高度2，寬度3的矩陣(亦即2列, 3行的矩陣), 2×3 (two by three)的×只是一個“標點符號”，因此，“尺度2×3”不能講成“尺度6”. 同理，$\mathbb{R}^{2\times 3}$與$\mathbb{R}^6$也不同.

(4) 通常將1×1矩陣看成是普通的數，也就是$\mathbb{R}^{1\times 1}=\mathbb{R}$.
有些書將$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$看成$[\,x_1\ x_2\ \ldots\ x_n\,]$，也就是$\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{1\times n}$. 有些書將$\mathbb{R}^n$當做是$\mathbb{R}^{n\times 1}$. 也有的將$\mathbb{R}^n$，$\mathbb{R}^{1\times n}$，$\mathbb{R}^{n\times 1}$看成彼此不同.

(5) 構成矩陣的那些數稱爲它的entry，描寫entry的位置時，先講列位

置, 再講行位置. 例如a_{23}通常是代表第2列的第3個entry.

(6) 有的書把$\mathbb{R}^{m\times n}$記爲$\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$或$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, 而把$\mathbb{R}^{n\times n}$記爲$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(7) 佈於有理數系的所有$m\times n$矩陣所成的集合記爲$\mathbb{Q}^{m\times n}$; 佈於複數系的所有$m\times n$矩陣所成的集合, 記爲$\mathbb{C}^{m\times n}$; (佈於其他field依此類推).

2 定義:《各種矩陣》

① $\mathbb{R}^{n\times 1}$內的矩陣特稱爲行向量(*column vector*)或行矩陣(*column matrix*); $\mathbb{R}^{1\times n}$內的矩陣特稱爲列向量(*row vector*)或列矩陣(*row matrix*).

② 高度等於寬度的矩陣, 特稱爲方陣(*square matrix*). 對於方陣 $[a_{ij}]_{n\times n}$, $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ 構成主對角線.

③ 每個元素都是0的矩陣稱爲零矩陣, 記爲$O_{m\times n}$, $O_{n\times n}$簡記爲O_n.在不須強調尺度時可將零矩陣記爲O.

④ 方陣若主對角線外全是0, 就稱爲對角(線)矩陣(*diagonal matrix*). 若對角矩陣的主對角線元素由左上至右下依次爲$d_1, d_2, ..., d_n$, 則此矩陣可記爲$\mathrm{diag}(d_1, d_2, ..., d_n)$. 另外, $kI=\mathrm{diag}(k, k, ..., k)$稱爲常數矩陣.

⑤ 若方陣主對角線的左下方全部是0, 就稱爲上三角矩陣(*upper triangular matrix*).
若上三角矩陣的主對角線本身也全是0, 就稱爲嚴格(*strictly*)上三角矩陣.
若上三角矩陣的主對角線上全是1, 就稱爲單位(*unit*)上三角矩陣.
(下三角矩陣, 嚴格下三角矩陣, 及單位下三角矩陣的定義依此類推).

⑥ 矩陣中若只有第i列的第j個元素是1, 而其他都是0, 就記爲E_{ij}.

【要訣】(1) 本定義將$\mathbb{R}$換成$\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, ..., 時仍適用. 以下雖然用$\mathbb{R}$解說, 但都可以換成其他數系(field). (field的定義見CH5定義1)

(2) 有的書不要求對角線矩陣, 上三角矩陣, 下三角矩陣是方陣.

(3) 對角線矩陣是上三角矩陣(其逆不真); 嚴格上三角矩陣是上三角矩陣(其逆不真).

習題2.1

寫出n階方陣$[a_{ij}]$ 爲下三角矩陣及嚴格下三角矩陣的充要條件. ⚇

3 定義:《矩陣的加法, 係數積, 線性組合》

對$A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $k, k_1, k_2, \ldots, k_r\in\mathbb{R}$，定義：

① $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$, $A \quad =[a_{ij} \quad {}_{ij}]$,

② $kA=[ka_{ij}]$.

③形如$k_1A_1+k_2A_2+\ldots+k_rA_r$ 的式子稱爲$A_1, A_2, \ldots, A_r$的線性組合(linear combination).

【要訣】(1) 兩矩陣必須尺度完全相合才能相加, 相減.

(2) 矩陣相加就是各對應元素相加, 矩陣乘係數就是把係數遍乘矩陣內的各元素.

(3) $h[a_{ij}]+k[b_{ij}]=[ha_{ij}+kb_{ij}]$

(4) 若$A=[a_{ij}]$, 則有 $A=\sum a_{ij}E_{ij}$

(5) ①中的計算內含mn次加減. ②中的計算內含mn次乘算.

(6) n階方陣的加法與係數積的計算複雜度都是$O(n^2)$.

習題3.1

設$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, 求 ①$3A$ ②A ③$3A+2B$

Ans: ① $\begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 21 & 3 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 14 & 13 \\ 27 & 3 \end{bmatrix}$

習題3.2

求 $2\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$