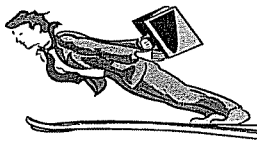
2-1 微分的定義



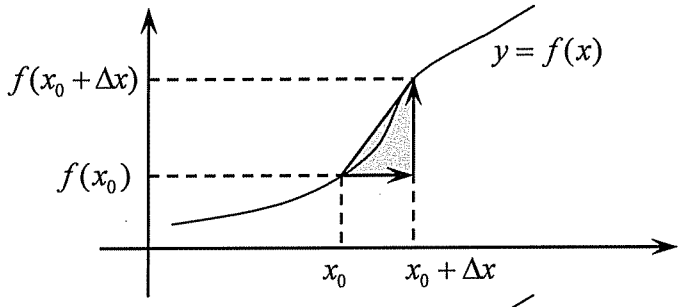
亂試用重點

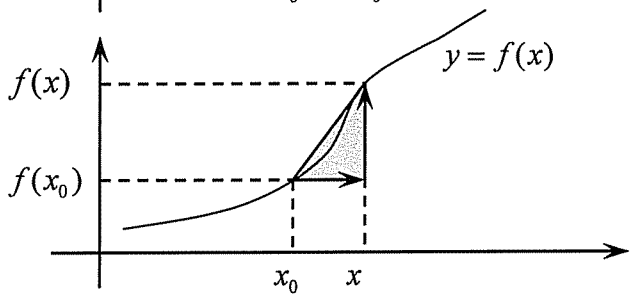
1. **定義**：

若 $f(x)$ 在定義域內的點 x_0 上為『**可微分**』，則其『**導數**』為

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

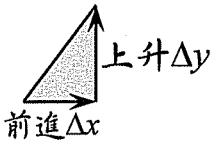
2. **導數之幾何意義**：





由以上兩個幾何圖形可明顯的發現：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta_x)-f(x_0)}{\Delta_x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$



$$=\text{退化後割線之}\frac{\text{上升}\Delta y}{\text{前進}\Delta x}(\text{即}\textbf{斜率})=\textbf{切線之斜率}$$

可見得：**導數**即為曲線在切點 x_0 附近之**切線斜率**。

3. **導數之物理意義**：

若 $S=f(t)$ 為一直線運動質點之位置函數，

則該質點在時間 $t=t_0$ 時之**瞬時速率**可用導數來定義：

$$\boxed{f'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}=\text{瞬時之}\frac{\text{位移}\Delta s}{\text{時間}\Delta t}=\text{瞬時速率}}$$

4. **導數的符號有很多種型式**：

下列符號均為函數 $y=f(x)$ 之導數：

$$\boxed{y',\ f',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x),\ D_x f,\ Df}$$

5. **微分基本性質**：

若 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 為可微分，則

(1) $cf(x)$ 為可微分，且 $\boxed{(cf)'(x)=cf'(x)}$

(2) $f(x)\pm g(x)$ 為可微分，且 $\boxed{(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)}$

(3) $f(x)g(x)$ 為可微分，且 $\boxed{(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$

(4) $f(x)g(x)h(x)$ 為可微分，

且 $\boxed{(fgh)'(x)=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)}$

(5) 若 $f(x)\neq 0$，則 $\dfrac{1}{f(x)}$ 為可微分，且 $\boxed{(\dfrac{1}{f(x)})'=-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}}$

(6) 若 $g(x)\neq 0$，則 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 為可微分，

且 $\boxed{(\dfrac{f}{g})'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}}$

6. **基礎可微函數公式：**

(1) $\dfrac{d}{dx}C=0$	(2) $\dfrac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$	(3) $\dfrac{d}{dx}\sin x=\cos x$
(4) $\dfrac{d}{dx}\cos x=-\sin x$	(5) $\dfrac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x$	(6) $\dfrac{d}{dx}\cot x=-\csc^2 x$
(7) $\dfrac{d}{dx}\sec x=\tan x\sec x$		
(8) $\dfrac{d}{dx}\csc x=-\cot x\csc x$		

7. **連鎖律：**

(1) 若 $y=g(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，且 $z=f(y)$ 在 $y=g(a)$ 處可微分，則

$(fog)(x)=f(g(x))$ 在 $x=a$ 處可微分，且 $\boxed{(fog)'(a)=f'(g(a))g'(a)}$

(2) 同理，對於任意點 x：$\boxed{\dfrac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))g'(x)}$

(3) 若令 $z=f(y)$，$y=g(x)$ 則上式可寫為：$\boxed{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx}}$

(4) 連鎖律還可以繼續延伸：

$$\boxed{\frac{d}{dx}f(g(h(x)))=f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}}$$