

§1-0 什麼是極限？

微積分(Calculus)是一門有趣的學問，應用很廣泛，學習方法上同學不要再以背誦或硬記的方式來讀，在我的寫法下可當成小說研讀，因為唸大學時“讀書方法”與“認真程度”決定您的未來。

極限(limit)是學習微積分的基礎工具，其觀念直到十九世紀初才由法國數學家柯西(Cauchy, 1789~1857)以數學語言描述成功。本書開門見山的以“俏皮話”來解釋極限式

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \cdots(1)$$

之意義會較親切，即：

「如果 x 趨近 a (但 $x \neq a$)，則 $f(x)$ 會趨近 b ，能多近就多近！」

(1)式僅出現 4 個數字： a 、 b 、 x 、 $f(x)$ ，現在舉例來說明其關係是最好不過了！例如用功程度與考試分數一定有關係，假設微積分這一科的考試滿分為 100 分($b=100$)，而每人一天當中最大可能的讀書時間為 10 小時($a=10$)，現藉由下表所列：

讀書時間 (自變數) x	最大讀書時間 (固定) a	分數 (因變數) $f(x)$	滿分 (固定) b
5	10	50	100
7	10	70	100
9	10	90	100
9.5	10	95	100
9.9 $\longrightarrow$	10	99 $\longrightarrow$	100

已可看出 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 之真正意義！以數學原汁原味敘述 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 如下所示：

1-4 微積分學習要訣

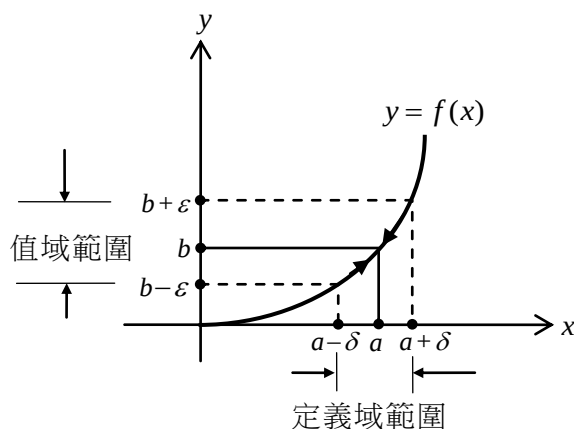
定義 極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 之數學定義(柯西所提出)為

『對任何 $\varepsilon > 0$ ，恆可找到一個 $\delta > 0$ (此 δ 和 ε 有關)，使得當 $0 < |x - a| < \delta$ 時，必有 $|f(x) - b| < \varepsilon$ 。』

觀念說明

1. 同學須瞭解 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 之“因果”含意。我們常說：“種因得果”，對上式而言， $x \rightarrow a$ 是“因”，而 $f(x) \rightarrow b$ 是“果”。且極限只有二種可能：存在或不存在。

2. 此處以幾何與函數觀念來解釋 ε 與 δ 之意義。若 x 為自變數，則 $f(x)$ 為 x 之函數，由 $0 < |x - a| < \delta$ 知 δ 是自變數之範圍，即“定義域”之範圍；由 $|f(x) - b| < \varepsilon$ 知 ε 是函數之範圍，即“值域”之範圍，如下圖所示：



3. 證明 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 之過程，稱為「 ε - δ process」，偏數學操作，因此於§1-4 再來說明會較適當(僅數學系所或統計系所會考此類題目)。

以下先列出一些極限結果(視為極限國之規矩，憑直覺得知，毋須證明，通常這些函數皆為連續！)，以利於爾後之計算與應用：

1. $\lim_{x \rightarrow a} (c) = c$ ，其中 c 為一常數。

2. $\lim_{x \rightarrow a} (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0) = b_n a^n + \cdots + b_1 a + b_0$ 。
3. $\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$ 。
4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ ，但 $a \neq 0$ 。
5. $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ 。(其它之三角函數亦同)

◆極限運算之基本性質

若已知 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ， $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ ，則

1. $\lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kA$ ，其中 k 為常數。
2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$

即：「先求和差，再求極限」與「先求極限，再求和差」相同。

3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$

即：「先求積再求極限」與「先求極限再求積」相同。

4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}$ ，但 $B \neq 0$ 。

5. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = A^n$ 。

6. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{1/n} = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{1/n} = A^{1/n}$ 。

7. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t = x - a}} f(t + a) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x + a)$ ， $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t = \frac{1}{x}}} f\left(\frac{1}{t}\right)$ 。

以上性質經常用之，但須注意一個前提：個別(單一)之極限均應先存在後才可計算。

說例 1 基本題	請問 $\lim_{x \rightarrow 2} [x^2 + (-x)] = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} (-x)$ 是否成立？為什麼？
-------------	---

1-6 微積分學習要訣

[解]成立！ $\because \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ ， $\lim_{x \rightarrow 2} (-x) = -2$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} [x^2 + (-x)] = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} (-x) = 4 - 2 = 2 \quad (\text{存在})。$$

類 請問 $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2x) = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 2x$ 是否成立？

答：成立！ $\because \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ ， $\lim_{x \rightarrow 3} 2x = 6$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2x) = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} 2x = 9 + 6 = 15 \quad (\text{存在})。$$

說例 2 觀念題	請問 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} \right)$ 是否成立？為什麼？
-------------	--

[解]不成立！ $\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ (不存在)。

類 請問 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 是否成立？為什麼？

答：不成立！ $\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ (不存在)。

說例 3 基本題	若 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = 6$ ， $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2$ ，求 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ 之值。
-------------	---

[解]從 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2$ 看出 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 皆存在！

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 6$$

$$\text{由 } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2 \end{cases} \text{ 聯立解得 } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2 \end{cases}$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 4 \cdot 2 = 8。$$

類 若 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = 2$ ， $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1$ ，求 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = ?$

答：從 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1$ 看出 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 皆存在！

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2$$

$$\text{由 } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1 \end{cases} \text{ 聯立解得 } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{3}{2} \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}。$$

※精選習作※

1. 請問 $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{x-2} + \left(-\frac{1}{x-2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{1}{x-2} \right)$ 是否成立？
2. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 5$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 7$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - 2g(x)] = ?$
3. 已知 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ ，求 $\lim_{x \rightarrow -2} \left(f(x) + \frac{f(x)}{x} \right) = ?$ (台聯大轉)

※解答※

1. 不成立！ $\because \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = \infty$ (不存在)。
2. $5 - 2 \cdot 7 = -9$ 。
3. 由題意得 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4$ ，故原式 $= \lim_{x \rightarrow -2} f(x) + \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x} = 4 + \frac{4}{-2} = 2$ 。

§1-1 極限求法

極限之計算，依目前進度整理成如下六種類型，說穿了只是“極限國”的小觀念或計算而已，不足為懼，很多內容都是高中課程！

第一型 連續函數型 $\rightarrow$ 直接代入

說例 1 基本題	求 $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{20x + 6 + \sqrt{x^2 + x - 1}} = ?$
-------------	---