

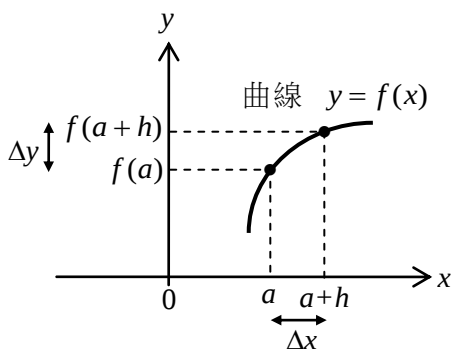
§2-1 微分之意義

如右圖所示，對單變數函數 $y = f(x)$ ，考慮 x 從 a 變化到 $a+h$ (即 x 之變化量為 $\Delta x = h$) 時，此時 y 的變化量即為 $\Delta y = f(a+h) - f(a)$

再計算 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (\Delta x = h)$

令 $h \rightarrow 0$ ，則上式即成為一極限問題！若極限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ 存

在，則稱此極限值為函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 點的導數(derivative)，並以 $f'(a)$ 表示之。如下之定義：



定義 可微分(differentiable)

若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處之極限值

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \cdots (1)$$

存在，則稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 點可微分(differentiable)。

定義 導函數

對已知一個函數 $f(x)$ 而言，若其定義域中每一個數 x 皆能使

$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ 存在，則稱 $f'(x)$ 為 $f(x)$ 之導函數。

當 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在時，此極限值又可記為 $\frac{dy}{dx}$ 。

◎文法比較：

{	可微分：描述一個函數在“點”或“區間”之幾何特性
	導函數：描述一個函數在“點”或“區間”之微分結果

學習時需將(1)式記住，因為一輩子均會用到！(1)式在應用上經變數變換亦可得到第二種表示式，說明如下：

令 $h = x - a$ ，則 $x = h + a$ ，可將(1)式再度表示為

2-4 微積分學習要訣

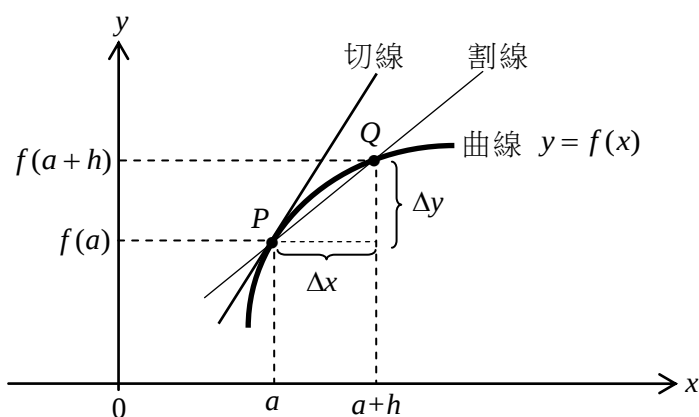
$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \equiv f'(a)} \quad \cdots(2)$$

(2)式可視為(1)式之“姊妹式”，需記住。

導數的幾何意義

如下圖所示，割線 $\overline{PQ}$ 之斜率為 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

稱 m 為 $f(x)$ 在 P 、 Q 間之平均變化率(average rate of change)。



當 $h \rightarrow 0$ 時，有 $Q \rightarrow P$ ， m 值即與過 $P(a, f(a))$ 點之切線斜率相同。因此若 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ 存在，此極限之幾何意義即代表過 P 點之切線斜率也。

應用：給定曲線 $y = f(x)$ ，則過切點 $(a, f(a))$ 之

切線(tangent line)方程式為 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

與切線垂直之**法線**(normal line)方程式為 $y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)$

至於一個函數之可微分與連續，這二種特性有何關聯呢？下面的定理正好可以回答此問題：

定理 設 $f(x)$ 在 $x=a$ 點可微分，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 點連續。

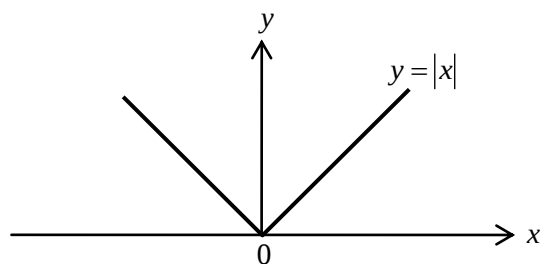
證明：因為 $f(x)$ 在 $x=a$ 點可微分， $\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 存在

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= 0 \cdot f'(a) = 0 \end{aligned}$$

故 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \sim$ 得證！

* * *

但連續函數不一定可微分，為說明此事實，此處利用函數圖形分成三類說明之。第一類如 $y = f(x) = |x|$ 之圖形如下所示：



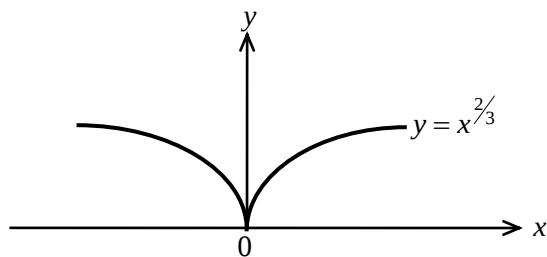
在 $x=0$ 稱為**角點**(corner)

$$\text{因為 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x} = -1$$

二邊之極限值不等，即不可微分，此點依外形稱為**角點**(corner)。

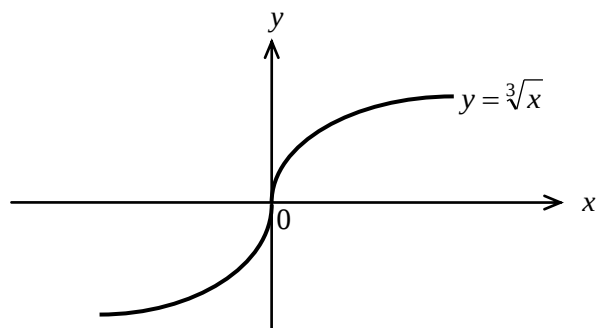
第二類如 $y = f(x) = x^{2/3}$ ，則 $f'(x) = \frac{2}{3x^{1/3}}$ ，在 $x=0$ 有 $f'(0^+) = \infty$ ，

$f'(0^-) = -\infty$ ，故不可微分，依外型稱此點為**尖點**(cusp)，如下圖所示：

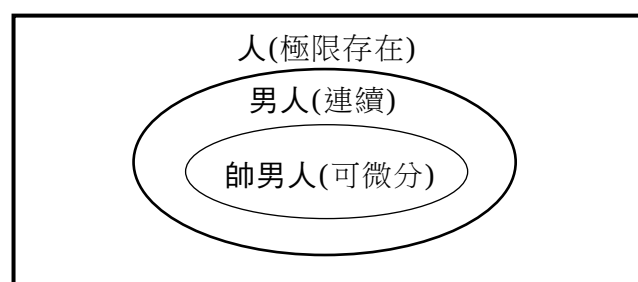
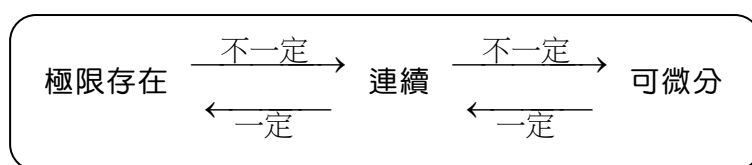


2-6 微積分學習要訣

第三類如 $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ ，則 $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$ ，在 $x=0$ 時有 $f'(0^+) = \infty$ ， $f'(0^-) = \infty$ ，故圖形雖平順，仍不可微分。但此圖形在外形上“仍”具有垂直切線(vertical tangent)，如下圖所示：



根據以上的說明，對任一個函數 $f(x)$ 在某一點之特性而言，吾人可得如下的重要心得：



觀念說明

1. 凡遇絕對值函數、指數函數、高斯函數、根號函數等，皆須以討論方式求“特殊點”之微分值(因為這些函數有斷點、尖點、角點之可能)。