

§1-0 什麼是極限(Limit)?

微積分(Calculus)是一門有趣的學問，應用廣泛，學習上不要以背誦或硬記的方式來讀，在我(已教微積分 100 次以上!)的寫法下可當成小說讀，因為唸大學時“讀到好書”與“認真程度”決定您的未來。

極限(limit)是學習微積分的基礎工具，其觀念直到十九世紀初才由法國數學家柯西(Cauchy, 1789~1857)以數學語言描述成功。本書開門見山的以“直白話”來解釋極限式

牛頓發明微積分
柯西讓微積分有底氣

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \cdots (1)$$

之意義會較親切，即：

「如果 x 趨近 a (但 $x \neq a$)，則 $f(x)$ 會趨近 b ，能多近就多近！」

(1)式僅出現 4 個數： a 、 b 、 x 、 $f(x)$ ，以舉例方式來說明其關係是最好不過了！例如讀書時間(自變數)與考試分數(因變數)一定有關係，假設微積分的考試滿分為 100 分($b=100$)，而每人一天當中最大可能的讀書時間為 10 小時($a=10$)，現藉由下表所列：

讀書時間 (自變數) x	最大讀書時間 (固定常數) a	分數 (因變數) $f(x)$	滿分 (固定常數) b
5	10	50	100
7	10	70	100
9	10	90	100
9.5	10	95	100
9.9	10	99	100

已可看出 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 之真正意義！現以原汁原味敘述 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 之數學定義如下：

1-4 微積分學習要訣

定義 極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 之數學定義(柯西所提出)為

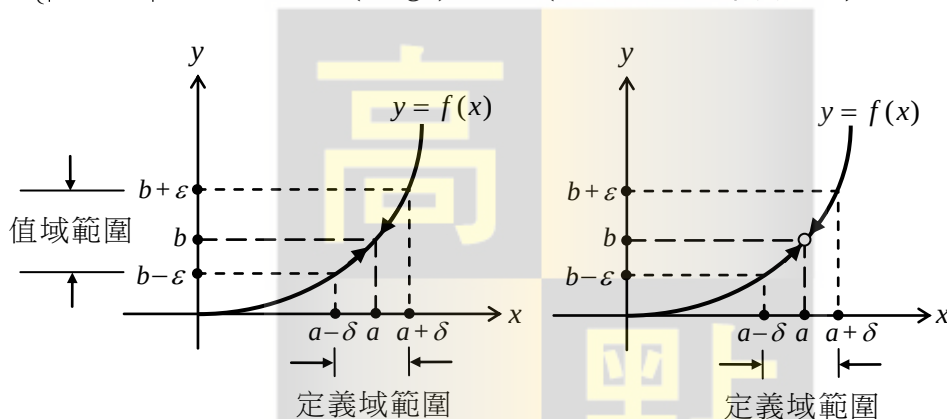
『對任何 $\varepsilon > 0$ ，恆可找到一個 $\delta > 0$ (此 δ 和 ε 有關)，使得當 $0 < |x - a| < \delta$ 時，必有 $|f(x) - b| < \varepsilon$ 。』

◎觀念說明◎

1. 同學須瞭解 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 之“因果”含意。我們常說：“種因得果”， $x \rightarrow a$ 是“因”，而 $f(x) \rightarrow b$ 是“果”。極限結果只有二種可能：存在或不存在(Does Not Exist，原文書常簡稱 DNE)。若極限存在，則規定其「等於」 b (確定之數字)。若極限不存在，後面再說明其分類。

2. 現以幾何與函數觀念來解釋定義中 ε 與 δ 之意義。如下圖所示：

$$\begin{cases} 0 < |x - a| < \delta : \delta \text{ 是定義域(domain) } x \text{ 之範圍(且看出需 } x \neq a) \\ |f(x) - b| < \varepsilon : \varepsilon \text{ 是值域(range)之範圍(且得知容許 } f(x) = b) \end{cases}$$



說明：左圖之 $f(a)$ 存在，右圖之 $f(a)$ 不存在，但二圖之 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 皆存在。

比較： $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) : \text{極限值} \\ f(a) : \text{函數值} \end{cases}$

$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 與 $f(a)$ 二者是互為獨立事件(即二者無關！)

3. 證明 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ 之過程，稱為「 ε - δ process(程序)」，偏數學操作

，因此於 §1-4 再來說明會較適當(建議數學、統計系所的學生須具備此能力，其它則不過度要求，僅數學、統計系所會考此類題目)。

4. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{t \rightarrow a} f(t)$ ，此為基本常識。

以下列出一些極限運算之基本工具(視為極限國之規矩，可憑直覺得知，省略無聊證明！)，以利於化繁為簡之計算：

●極限定律(Limit laws)～極限運算之基本性質

若已知 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ， $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ ，則

即數目有限的極限存在
才可做加減乘除的運算

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$

即：「先加減，再求極限」與「先求極限，再加減」相同。

2. $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kA$ ，其中 k 為常數。

3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$

即：「先乘再求極限」與「先求極限再乘」相同。

4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}$ ，但 $B \neq 0$ 。

即：「先除再求極限」與「先求極限再除」相同。

引申：

5. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = A^n$ ，其中 $n \in \mathbb{N}$ 。

6. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{1/n} = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{1/n} = A^{1/n}$ 。

7. $\lim_{x \rightarrow a} (c) = c$ ，其中 c 為一常數。此結果繪圖即知！

8. $\lim_{x \rightarrow a} (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0) = b_n a^n + \cdots + b_1 a + b_0$ 。

多項式可直接代入

有了以上的極限定律，則以下的極限工具也都可以接受了：

1. $\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$ 。

1-6 微積分學習要訣

2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ ，但 $a \neq 0$ 。
3. $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ 。(其它之三角函數亦同)

注意 為了方便計算極限，可以採用**變數變換**，三種常見的變數變換

如下：(不要背！)～後面的計算會出現

1. 平移： $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t+a) \equiv \lim_{x \rightarrow 0} f(x+a)$
 $\uparrow$
 $t = x - a$

2. 倒數： $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{t}\right) \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$
 $\uparrow$
 $t = \frac{1}{x}$

3. 變號： $\lim_{x \rightarrow -a} f(x) = \lim_{t \rightarrow a} f(-t) \equiv \lim_{x \rightarrow -a} f(-x)$
 $\uparrow$
 $t = -x$

以上在計算時還須注意一個前提：個別(單一)之極限均應先存在後才可計算，且個別極限的項數要有限個，不可以是無限多項。

說例 1 若 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$
基本題

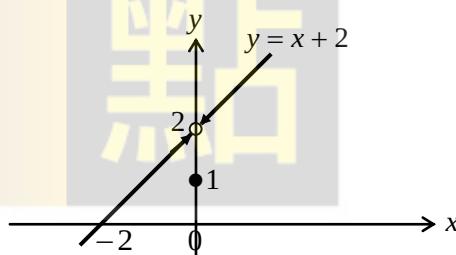
[解] $f(x)$ 之圖形如右所示：

看出 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x+2) = 2$

雖然 $f(0) \neq 2$ ！

$f(0)$ ：函數值。

再度搞清楚：函數值與極限值二者是獨立的



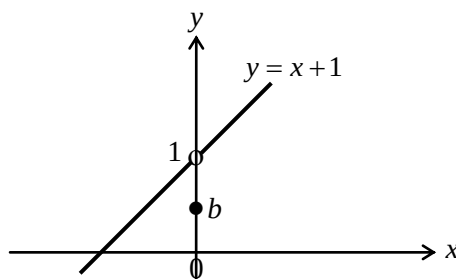
類 若 $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$ (答) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x+3) = 3$ 。

4. 可移不連續(removable discontinuity)：

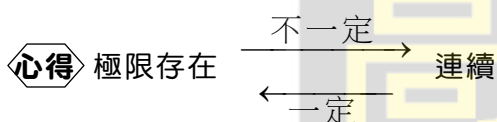
由人為定義導致之不連續，既是人為，那亦可再經人為而使其連續

，例如： $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 0 \\ b, & x = 0 \end{cases}$ ，顯然可知，若 $b \neq 1$ ，表示 $f(x)$ 在

$x=0$ 為不連續；若 $b=1$ ，則連續！如下圖所示：



由 $f(x)$ 在某一點連續性與極限之計算，可知：若 $f(x)$ 之極限不存在，則 $f(x)$ 一定不連續；即使 $f(x)$ 之極限存在， $f(x)$ 也不一定連續！因此可得如下心得：



定義 在區間內連續(Continuous on the interval)

若 $f(x)$ 在某區間內的每一點皆連續，稱 $f(x)$ 在區間內連續。

說例 2 基本題	試證 $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ 在區間 $[-2, 2]$ 連續。(台北大)
-------------	---

[解] 令 $a \in [-2, 2]$ ，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-a^2} = f(a) \sim$ 得証。

類 試證 $f(x) = 2 - \sqrt{1-x^2}$ 在區間 $[-1, 1]$ 連續。

答 令 $a \in [-1, 1]$ ，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (2 - \sqrt{1-x^2}) = 2 - \sqrt{1-a^2} = f(a) \sim$ 得証。

接著看看連續性有哪些定理可用！(參考看看就好)

定理 多項式、有理式、根號函數、三角函數在其定義域內處處連續。

定理 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 $x=a$ 皆連續，且 $g(a) \neq 0$ ，則 $f(x) \pm g(x)$ 、 $f(x) \cdot g(x)$ 、 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x=a$ 皆連續。

定理 $f(x)$ 在 $x=b$ 連續，且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ ，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$

即對連續函數而言，極限操作與函數操作是可交換的！(數學系)

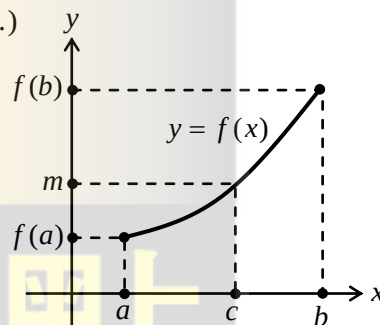
定理 最值定理(Extreme Value Thm.) (數學系)

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續，則 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大與最小值。

定理 中間值定理(Intermediate Value Thm.)

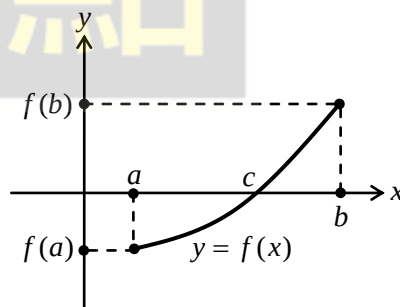
若函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續，且 $f(a) \neq f(b)$ ，則至少存在一數 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = m$ ，其中 $f(a) < m < f(b)$ 。

此定理成立之事實可由右圖幾何意義而得知！



定理 勘根定理～乃中間值定理之特例
設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 為連續，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，則至少存在一數 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = 0$ 。即 c 為 $f(x) = 0$ 之根。

此定理意義如右：將中間值定理之圖形往下平移就是勘根定理！



說例 3	若 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 4 = 0$, $\therefore f(0) = -4 < 0$, $f(2) = 4 > 0$
說明題	則依據勘根定理知在 $(0, 2)$ 之間存在一根使 $f(x) = 0$ 。

* * *

類 試證 $f(x) = 3x^3 + x - 1$ 在 $(0, 1)$ 之間至少存在一根。

答 $\because f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 3 > 0$, 得証。

說例 4 基本題	若 $f(x) = \begin{cases} \frac{k(x^2 - 4) + x - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$ 在 $x = 2$ 連續, 則常數 $k = ?$
-------------	---

[解]

(1) $f(2) = 3$ 是存在的。

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 要存在, 且其值為 3, 即 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{k(x^2 - 4) + x - 2}{x - 2} = 3$

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{k(x^2 - 4) + x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)[k(x + 2) + 1]}{x - 2} = 4k + 1 = 3, \text{ 知 } k = \frac{1}{2}。$$

* * *

類 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{k(x^2 - 1) - x + 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 為連續, 則常數 k 為何?

答 由 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{k(x^2 - 1) - x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)[k(x + 1) - 1]}{x - 1} = 2k - 1 = 5$, 知 $k = 3$ 。

說例 5 基本題	設 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ 2x + 1, & x < 0 \end{cases}$, 則 $f(x)$ 在 $x = 0$ 連續否?
-------------	---

[解]

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + 1) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1。$$

(2) $f(0) = (x^2 + 1)|_{x=0} = 1$, 故連續。

* * *

類 若 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x > 1 \\ 5x - 1, & x \leq 1 \end{cases}$ ，則 $f(x)$ 在 $x=1$ 連續否？

答 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2) = 3$ ，但 $f(1) = (5x - 1)|_{x=1} = 4$ ，故不連續。

說例 6 基本題	設 $f(x) = \begin{cases} ax, & x < -1 \\ 3x + b, & -1 \leq x < 2 \\ x^2 + 1, & x \geq 2 \end{cases}$ 為連續函數，求常數 a 、 b = ?
-------------	---

[解] 由 $\begin{cases} f(-1^-) = f(-1^+) \rightarrow -a = -3 + b \\ f(2^-) = f(2^+) \rightarrow 6 + b = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{解得}} a = 4, b = -1。$

類 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3, & 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b, & x \geq 3 \end{cases}$ 為連續函數，則常數 a 、 b = ?

答 $f(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ ， $f(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax^2 - bx + 3) = 4a - 2b + 3$

又 $f(3^-) = 9a - 3b + 3$ ， $f(3^+) = 6 - a + b$

由 $\begin{cases} f(2^-) = f(2^+) \rightarrow 4a - 2b = 1 \\ f(3^-) = f(3^+) \rightarrow 10a - 4b = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{解}} a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}。$

說例 7 觀念題	$f(x)$ 為連續函數， $g(x)$ 為不連續函數，以下敘述何者正確？ (1) $f(x) \pm g(x)$ 為不連續函數 (2) $f(x) \cdot g(x)$ 為不連續函數 (3) $\frac{f(x)}{g(x)}$ 為不連續函數
-------------	---

[解]

(1) 正確。

(2) 錯！因為 $f(x) \cdot g(x)$ 有可能連續，例如 $f(x) = x$ ， $g(x) = \frac{1}{x}$ 。

(3)錯！因為 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 有可能連續，例如 $f(x)=x$ ， $g(x)=\frac{1}{x}$ 。

* * *

※精選習作※

1. 設 $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$ ，求使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 點為連續之 k 值。
2. 設 $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ a+x^2, & 0 \leq x < 1 \\ bx, & x \geq 1 \end{cases}$ 為連續函數，求常數 a 、 b 之值。

※解答※

1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = k$ 。
2. 由 $\begin{cases} f(0^-) = f(0^+) \rightarrow 1 = a \\ f(1^-) = f(1^+) \rightarrow a+1 = b \end{cases} \xrightarrow{\text{解得}} a=1, b=2$ 。

§1-3 極限應用～漸近線(Asymptote)

本節說明極限之應用～求函數之漸近線(Asymptote)，也就是函數 $y=f(x)$ 之圖形在 x - y 平面會很接近的一條直線。此處將 $y=f(x)$ 之漸近線依“外型”分為三類，分別定義如下：

【定義】垂直(vertical)漸近線

若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$

則 $x=a$ 為 $y=f(x)$ 之垂直漸近線。

【例】 $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-3)}$ ～藉由圖形了解垂直漸近線的數學定義