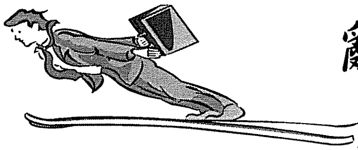
# 2-3 線性聯立方程式與 Gauss 消去法



## 亂試用重點

1. **二變數聯立方程式：**

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow x\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

即 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ 為該聯立方程式之**線性組合**。

2. **三變數聯立方程式：**

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_2 \end{cases} \Rightarrow x\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

即 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ 為該聯立方程式之**線性組合**。

3. 同理，$n$ 變數聯立方程式 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

之**線性組合**可表示為$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$，即$\boxed{A\underline{X}=\underline{b}}$。

(1) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$ 為『**係數矩陣**』(coefficient matrix)；

(2) $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 稱為『**右手係數**』；

(3) $[A\,|\,\underline{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$為『**增廣矩陣**』(augmented matrix)；

(4) 線性聯立方程式可將『**增廣矩陣**』，藉由**高斯消去法**來化簡並求解，因為化簡後之增廣矩陣與原增廣矩陣**等價**。

4. **定義：**

| 基本列運算 | 基本行運算 |
|---|---|
| (1) $r_{ij} \equiv$ 第$i$列與第$j$列**互換** | (1) $\mathrm{c}_{ij} \equiv$ 第$i$行與第$j$行**互換** |
| (2) $r_i^{(k)} \equiv$ 第$i$列**放大**$k$倍 | (2) $\mathrm{c}_i^{(k)} \equiv$ 第$i$行**放大**$k$倍 |
| (3) $r_{ij}^{(k)} \equiv$ 第$i$列乘$k$，**插入**第$j$列 | (3) $\mathrm{c}_{ij}^{(k)} \equiv$ 第$i$行乘$k$，**插入**第$j$行 |

**例如**：(1) $r_{12}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&5&6\\1&2&3\end{bmatrix}$ (2) $r_1^{(2)}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4&6\\4&5&6\end{bmatrix}$

(3) $r_{12}^{(2)}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\6&9&12\end{bmatrix}$

5. **列梯形矩陣** (**echelon matrix**)：

**定義**：

(1) **非零列**擺在矩陣的上方，**零列**擺在矩陣的下方；

(2) 每一個**非零列**的第一個**非零元素**(**定位點**)，在**愈下方列愈靠右**。

**例如**：$\begin{bmatrix}\boxed{3}&2&5&7&2&3&1\\0&0&\boxed{1}&3&2&4&2\\0&0&0&0&0&\boxed{2}&1\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

**6. 簡化列梯型矩陣(列標準矩陣) (reduced row-echelon matrix)**：

**定義**：

(1) 每列之第一個**非零元素**(**定位點**)均為 1 之『**最簡**』**列梯形矩陣**。

(2) 每列之第一個**非零元素**(**定位點**)之上方**沒有**任何**非零元素**。

**例如**：$\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&0&7&2&0&1\\0&0&\boxed{1}&3&2&0&2\\0&0&0&0&0&\boxed{1}&1\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

**7. Gauss 消去法與 Gauss-Jordan 消去法(Gauss-Jordan elimination)**：

(1) 利用基本列運算，將矩陣簡化成『**列梯形矩陣**』，稱為『**Gauss 消去法**』。

(2) 利用基本列運算，將矩陣簡化成『**簡化列梯形矩陣**』的方法，稱為『**Gauss-Jordan 消去法**』。