桿件	N_i	n_i	L_i
bc	$\sqrt{2}P$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}L$
cd	0	-1	L
bd	$-P$	-1	L
ac	0	0	L

應用單位荷重法可求得b 點往右變位δ_{bh}與d 點往左變位δ_{dh}之和如下：

$$(\delta_{bh}+\delta_{dh})=1\times\delta_{bh}+1\times\delta_{dh}=\frac{1}{AE}\sum_{i=1}^{5}n_i\cdot N_iL_i$$

$$=\frac{1}{AE}[0\times(-P)\times L+\sqrt{2}\times\sqrt{2}P\times\sqrt{2}L+(-1)\times0\times L$$
$$+(-1)\times(-P)\times L+0\times0\times L]$$

$$=\frac{(2\sqrt{2}+1)PL}{AE}$$

而由幾何變形關係圖可看桿件bd之旋轉角度θ_{bd}為

$$\theta_{bd}=\frac{\delta_{bh}+\delta_{dh}}{L}=\frac{(2\sqrt{2}+1)P}{AE}(\curvearrowright)$$

5-8　能量法求解溫度效應問題

1. 考慮一直形等斷面均質桿件，如圖5-23所示，其熱膨脹係數爲α，若桿件爲線彈性，且於右端斷面處承受一負荷P，此時溫度並上升了ΔT，則桿件內之應變能應分爲兩部分計算，首先計算因負荷P作用所引起之應變能，既然桿件爲線彈性，則因負荷P作用所引起之應變能U_i爲

$$U_i=\frac{P^2L}{2AE} \tag{5-72}$$

再考慮當溫度上升ΔT時，此時桿件進一步伸長了$\alpha\Delta TL$，而負荷P則保持定值並隨桿件伸長而往右移動了$\alpha\Delta TL$，故其做功量爲

$P\alpha\Delta TL$ ，此功在假設無能量損失下，將以應變能形式儲存於桿件內，這部分應變能以 U_2 表示爲

$$U_2 = P\alpha\Delta TL \tag{5-73}$$

所以桿件內之應變能 U 應等於

$$U = U_1 + U_2 = \frac{P^2L}{2AE} + P\alpha\Delta TL \tag{5-74}$$

應用卡氏第二定理可求得桿件之伸長量 δ 爲

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{P^2L}{2AE} + P\alpha\Delta TL\right) = \frac{PL}{AE} + \alpha\Delta TL \tag{5-75}$$

由式(5-75)可看出桿件之伸長量 δ 包含兩部分，第一項爲負荷 P 單獨作用所引起之變形，而第二項爲溫度上升 ΔT 所引起之伸長量。

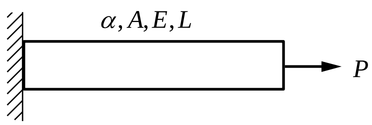


圖5-23　直形等斷面桿件

2. 考慮一線性桁架結構，其組成之桿件均爲直形等斷面均質桿件，其中第 i 根桿件之熱膨脹係數爲 α_i ，楊氏係數爲 E_i ，斷面積爲 A_i ，而長度爲 L_i 。在承受負荷後，第 i 根桿件之軸向內力爲 N_i ，若溫度同時上升了 ΔT_i ，則由式(5-74)知結構之應變能爲

$$U = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{N_i^2L_i}{2A_iE_i} + N_i\alpha_i\Delta T_iL_i\right) \tag{5-76}$$

欲求負荷 P_i 方向之變位 Δ_i ，可應用卡氏定理求得，如下所示

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{N_iL_i}{A_iE_i}\cdot\frac{\partial N_i}{\partial P_i} + \frac{\partial N_i}{\partial P_i}\cdot\alpha_i\Delta T_iL_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial N_i}{\partial P_i}\left(\frac{N_iL_i}{A_iE_i} + \alpha_i\Delta T_iL_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial N_i}{\partial P_i}\cdot\delta_i \tag{5-77}$$

式中 δ_i 代表第 i 根桿件因軸向內力 N_i 與溫度上升 ΔT_i 所引起之變形量，等於

$$\delta_i = \frac{N_iL_i}{A_iE_i} + \alpha_i\Delta T_iL_i \tag{5-78}$$

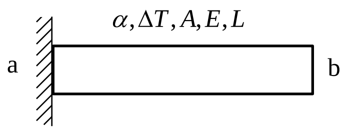
3. 同理，若以單位荷重法來求解此問題，則因第 i 根桿件之實際變形量 δ_i 爲軸向內力 N_i 與溫度上升 ΔT_i 所引起，所以單位荷重法方程式仍爲

$$\Delta_i = \sum_{i=1}^{n} n_i \cdot \delta_i \tag{5-79}$$

但其中 δ_i 必須以式(5-78)代入。

範題 22

桿件 ab 如圖所示，若熱膨脹係數為 α、楊氏係數為 E、長度為 L，而斷面積為 A，當溫度上升 ΔT 時，試應用能量法求桿件 ab 之伸長量。



➠此題為應用卡氏定理求解溫度效應靜定問題之基本應用。

【解析】

於 b 點加上一假想之負荷 P，則溫度上升 ΔT 後桿件之應變能 U 為

$$U = \frac{P^2 L}{2AE} + P\alpha\Delta TL$$

應用卡氏定理可求得

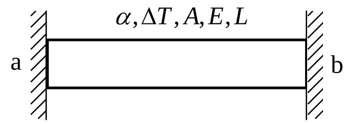
$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PL}{AE} + \alpha\Delta TL$$

又因假想之負荷 $P = 0$，故桿件 ab 之伸長量 δ 為

$$\delta = \alpha\Delta TL$$

範題 23

兩端固定之桿件 ab 如圖所示，若熱膨脹係數為 α、楊氏係數為 E、長度為 L，而斷面積為 A，當溫度上升 ΔT 時，試應用能量法求桿件 ab 之內力 N。



➠此題為應用卡氏定理求解溫度效應靜不定問題之基本應用。

【解析】

選 b 點反力 N 為贅餘力，則可視為如下圖所示情形，溫度上升 ΔT 後桿件