

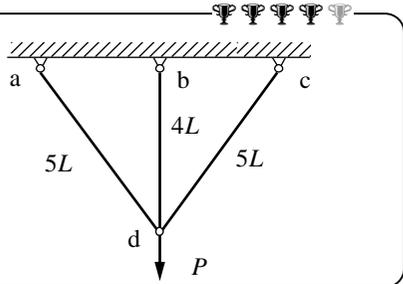
應用卡氏定理可得到

$$\delta_h = \frac{\partial U}{\partial P} \Big|_{P=Q=0} = 3\alpha\Delta TL$$

$$\delta_v = \frac{\partial U}{\partial Q} \Big|_{P=Q=0} = \frac{9}{4}\alpha\Delta TL$$

範題 25

桁架如圖所示，若桿件之熱膨脹係數為 α ，楊氏係數為 E ，而斷面積為 A 。當接點 d 處承受負荷 P ，且桿件 bd 溫度上升 ΔT ，試應用能量法求 d 點之垂直位移 δ_v 。



此為典型靜不定桁架問題加上溫度效應之影響，解題關鍵一樣在於應變能如何計算。

【解析】

選 b 點反力 R 為贅餘力，則桁架可視為如右圖所示。因為左右對稱，故桿件 ad 與 cd 之內力相同，亦即

$$N_{ad} = N_{cd}$$

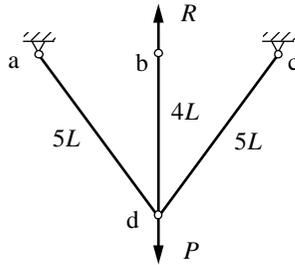
考慮 d 點之靜力平衡可得

$$2N_{ad} \times \frac{4}{5} + R - P = 0$$

$$\Rightarrow N_{ad} = \frac{5}{8}(P - R)$$

桁架之應變能 U 為

$$\begin{aligned} U &= 2 \times \frac{\left[\frac{5}{8}(P - R) \right]^2 5L}{2AE} + \frac{R^2 \times 4L}{2AE} + R \times \alpha\Delta T \times 4L \\ &= \frac{125(P - R)^2 L}{64AE} + \frac{2R^2 L}{AE} + 4R\alpha\Delta TL \end{aligned}$$



5-52 材料力學 (*Mechanics of Materials*)

因為贅餘力 R 為反力，故由最小應變能原理知

$$\frac{\partial U}{\partial R} = -\frac{125(P-R)L}{32AE} + \frac{4RL}{AE} + 4\alpha\Delta TL = 0$$
$$\Rightarrow R = \frac{125}{253}P - \frac{128}{253}\alpha\Delta TAE$$

而點 d 之垂直位移 δ_v 等於桿 bd 之伸長量，所以

$$\delta_v = \frac{R \times 4L}{AE} + \alpha\Delta T \times 4L = \frac{500}{253} \left(\frac{PL}{AE} + \alpha\Delta TL \right)$$