12-1 前　言

1. 當一樑各支點之總反力數目超過獨立靜力平衡方程式數目時，此種樑稱爲靜不定樑。若總反力數目爲 n 個，而獨立靜力平衡方程式爲 n_0 個，則靜不定度數（degree of static indeterminacy）爲 $n-n_0$ 。

2. 由於反力數目超過獨立靜力平衡方程式數目，故必須增加樑之撓曲變形幾何關係式，以求解反力。

3. 一般靜不定樑問題之解法，有下列幾種：

⑴奇函數法（或直接積分法）。

⑵重疊法：須配合查表或其他方法一起使用。

⑶矩面法：適用於樑有固定端支承或樑及負荷具有左右完全對稱性。

⑷共軛樑法：可將求解撓度問題轉換爲求解斷面之內力的問題。

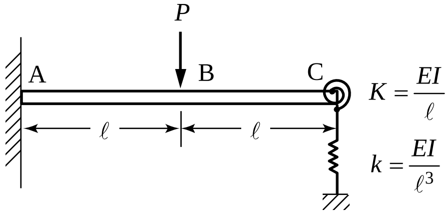
⑸卡氏第二定理：爲最常使用之能量法，有七種應用技巧，必須熟練。

⑹單位荷重法：用於由直形桿件所構成之結構，可配合體積積分觀念求解，能簡化計算過程。

⑺三力矩原理：爲一相當有效之方法，尤其針對連續樑分析時。

範題 1

靜不定樑如圖所示，試應用以下六種不同解法，求解所有支點反力。



⑴奇函數法。　⑵矩面法。
⑶重疊法。　⑷共軛樑法。
⑸卡氏定理。　⑹單位荷重法。

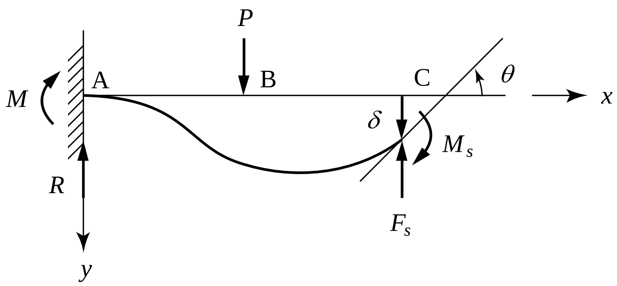
（93成大機械類題）

➠此題目的在於熟悉六種常用之靜不定解法，相同問題，雖使用不同解法，其答案應相同。

【解析】

⑴奇函數法

A.假設變形如下：



B. $$EIy''(x) = -M(x)$$

$$= -[M\langle x-0\rangle^0 + R\langle x-0\rangle^1 - P\langle x-\ell\rangle^1]$$

$$\Rightarrow EIy'(x) = -M\langle x-0\rangle^1 - \frac{R}{2}\langle x-0\rangle^2 + \frac{P}{2}\langle x-\ell\rangle^2 + c_1$$

$$\Rightarrow EIy(x) = -\frac{M}{2}\langle x-0\rangle^2 - \frac{R}{6}\langle x-0\rangle^3 + \frac{P}{6}\langle x-\ell\rangle^3 + c_1 x + c_2$$

C.邊界條件如下：

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y(2\ell) = \Delta$$

$$\Rightarrow EIy(2\ell) = -2M\ell^2 - \frac{4}{3}R\ell^3 + \frac{P}{6}\ell^3 = EI\cdot\frac{F_s}{EI/\ell^3} = F_s\ell^3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

$$y'(2\ell) = -\theta$$

$$\Rightarrow EIy'(2\ell) = -2M\ell - 2R\ell^2 + \frac{P}{2}\ell^2 = EI\cdot\left(-\frac{M_s}{EI/\ell}\right) = -M_s\ell \cdots\cdots\cdots\text{②}$$

D.靜力平衡條件為

$$\uparrow +,\quad \sum F_y = 0 \Rightarrow +R - P + F_s = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{③}$$

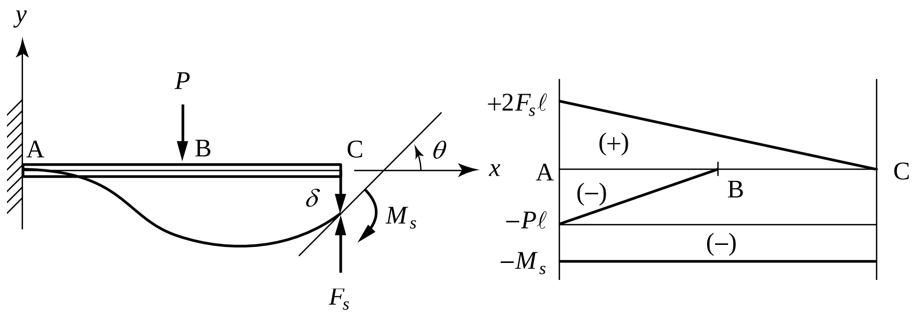
$$\circlearrowleft +,\quad \sum M_A = 0 \Rightarrow -M - P\ell - M_s + 2F_s\ell = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{④}$$

E.聯立式①～④可解得所有反力如下：

$$R=+\frac{11}{14}P\,,\quad F_s=+\frac{3}{14}P$$

$$M=-\frac{23}{42}P\ell\,,\quad M_s=-\frac{1}{42}P\ell$$

⑵矩面法



$$\delta_{C/A}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\times 2\ell\times 2F_s\ell\times\frac{2}{3}\times 2\ell-\frac{1}{2}\times\ell\times P\ell\times\left(\ell+\frac{2}{3}\ell\right)-M_s\times 2\ell\times\ell\right]$$

$$=-\frac{F_s}{k}=-\frac{F_s}{EI/\ell^3}\ (<0)$$

$$\Rightarrow\frac{8}{3}F_s\ell^3-\frac{5}{6}P\ell^3-2M_s\ell^2=-F_s\ell^3 \cdots\cdots ①$$

$$\theta_{C/A}=\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\times 2\ell\times 2F_s\ell-\frac{1}{2}\times\ell\times P\ell-M_s\times 2\ell\right]$$

$$=+\frac{M_s}{k}=+\frac{M_s}{EI/\ell}\ (>0)$$

$$\Rightarrow 2F_s\ell^2-\frac{1}{2}P\ell^2-2M_s\ell=M_s\cdot\ell \cdots\cdots ②$$

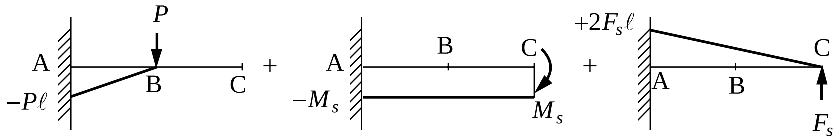
聯立式①～②可解得

$$F_s=+\frac{3}{14}P\,,\quad M_s=-\frac{1}{42}P\ell$$

最後，再由靜力平衡條件即可解得

$$R=+\frac{11}{14}P\,,\quad M=-\frac{23}{42}P\ell$$

⑶重疊法



$$\delta_1 = \delta_{C/A} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\times \ell \times (-P\ell)\times\left(\ell+\frac{2}{3}\ell\right)\right] = -\frac{5P\ell^3}{6EI}\ (\downarrow)$$

$$\delta_2 = -\frac{2M_s\ell^2}{EI}\ (\downarrow)$$

$$\delta_3 = +\frac{8F_s\ell^3}{3EI}\ (\uparrow)$$

$$\theta_1 = \delta_{C/A} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\times \ell \times (-P\ell)\right] = -\frac{P\ell^2}{2EI}\ (\circlearrowright)$$

$$\theta_2 = -\frac{2M_s\ell}{EI}\ (\circlearrowright)$$

$$\theta_3 = +\frac{2F_s\ell^2}{EI}\ (\circlearrowleft)$$

考慮C點向下之撓度，可得到

$$+\frac{5P\ell^3}{6EI}+\frac{2M_s\ell^2}{EI}-\frac{8F_s\ell^3}{3EI} = +\frac{F_s}{EI/\ell^3} \cdots\cdots ①$$

考慮C點切線在逆時針方向之斜角，可得到

$$-\frac{P\ell^2}{2EI}-\frac{2M_s\ell}{EI}+\frac{2F_s\ell^2}{EI} = +\frac{M_s}{EI/\ell} \cdots\cdots ②$$

聯立式①～②，可解得

$$F_s = +\frac{3}{14}P,\quad M_s = -\frac{1}{14}P\ell$$

最後，再由靜力平衡條件，即可解得

$$R = +\frac{11}{14}P,\quad M = -\frac{23}{42}P\ell$$