【解析】

應變能U為

$$U=2\left[\int_0^{\frac{L}{4}}\frac{(Px)^2}{2EI}dx+\int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}}\frac{\left[Px-P\left(x-\frac{L}{4}\right)\right]^2}{2EI}dx\right]$$

$$=2\left[\int_0^{\frac{L}{4}}\frac{(Px)^2}{2EI}dx+\int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}}\frac{\left(\frac{PL}{4}\right)^2}{2EI}dx\right]$$

應用卡氏定理如下：

$$\Delta=\frac{\partial U}{\partial P}=2\left[\int_0^{\frac{L}{4}}\frac{Px}{EI}\cdot x\,dx+\int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}}\frac{\frac{PL}{4}}{EI}\cdot\frac{L}{4}dx\right]$$

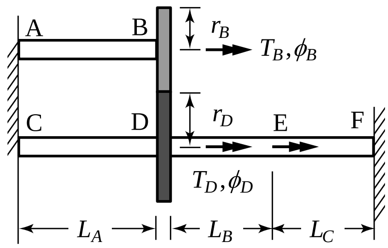
$$=2\left[\frac{P}{EI}\int_0^{\frac{L}{4}}x^2dx+\frac{PL^2}{16EI}\int_{\frac{L}{4}}^{\frac{L}{2}}dx\right]=2\left[\frac{PL^3}{192EI}+\frac{PL^3}{64EI}\right]=\frac{PL^3}{24EI}$$

所以A點之撓度δ_A為

$$\delta_A=\frac{\Delta}{2}=\frac{PL^3}{48EI}\quad(\downarrow)$$

範題 11

Shafts AB and CF as shown in the figure have the same diameter d and shear modulus G. A torque T_B is applied at B. Assume that the torque is transmitted from shaft AB to shaft CF by a single gear-tooth contact force, and neglect the thickness of the gears. It is known that the value of $r_B/r_D=1/2$, $T_D=T_E=0$, $L_A=L_B=L_C=L$.



⑴Determine the shaft rotation at E, the rotation of gear D.

⑵Determine the gear-tooth contact force between gear B and D.

⑶Determine the maximum shear stress in each shaft.　　（93交大機械）

➠**此類軸系問題可應用力法或位移法求解，但計算上都相當麻煩，最有效率的解法是應用卡氏第一定理，先將軸系之應變能U以B齒輪之轉角ϕ_B來表示之，則應變能U對ϕ_B偏微分應等於作用扭矩T_B，即可解得ϕ_B，則齒輪B之轉角ϕ_B與齒輪接觸力等均可求得。**

【解析】

由齒輪傳動關係知B齒輪之轉角ϕ_B與D齒輪之轉角ϕ_D具以下關係

$$\frac{\phi_B}{\phi_D}=\frac{r_D}{r_B}=\frac{2}{1}\Rightarrow\phi_D=\frac{1}{2}\phi_B \quad \cdots\cdots ①$$

因此整個軸系之應變能可以變位表示如下：

$$U=U_{AB}+U_{CD}+U_{DF}$$
$$=\frac{GJ\phi_B^2}{2L}+\frac{GJ\phi_D^2}{2L}+\frac{GJ\phi_D^2}{2\times 2L}=\frac{GJ\phi_B^2}{2L}+\frac{GJ\phi_B^2}{8L}+\frac{GJ\phi_B^2}{16L}$$
$$=\frac{11GJ\phi_B^2}{16L} \quad \cdots\cdots ②$$

由卡氏第一定理知

$$\frac{\partial U}{\partial\phi_B}=T_B\Rightarrow\frac{11GJ\phi_B}{8L}=T_B\Rightarrow\phi_B=\frac{8T_BL}{11GJ}$$

⑴軸E處之轉角ϕ_E為

$$\phi_E=\frac{1}{2}\phi_D=\frac{1}{4}\phi_B=\frac{2T_BL}{11GJ}$$ （↺）

齒軸D之轉角$\phi_D=\frac{1}{2}\phi_B=\frac{4T_BL}{11GJ}$ （↺）

⑵軸AB之扭矩T_{AB}為

$$T_{AB}=\frac{GJ\phi_B}{L}=\frac{8}{11}T_B$$

由齒輪B之靜力平衡可得到

$$T_B=T_{AB}+r_B\times F$$

式中F為齒輪B與D之接觸力，將T_{AB}代入上式，可解得

$$F=\frac{3T_B}{11r_B}$$

⑶軸 CD 所受之扭矩 T_{CD} 為

$$T_{CD}=\frac{GJ\phi_D}{L}=\frac{GJ\phi_B}{2L}=\frac{4}{11}T_B$$

而軸 DF 所受之扭矩 T_{DF} 為

$$T_{DF}=\frac{GJ\phi_D}{2L}=\frac{GJ\phi_B}{4L}=\frac{2}{11}T_B$$

所以各軸中之最大剪應力如下：

①軸 AB

$$\tau_{\max}=\frac{T_{AB}r}{J}=\frac{T_{AB}\cdot\frac{d}{2}}{\frac{\pi}{32}d^4}=\frac{16T_{AB}}{\pi d^3}=\frac{128T_B}{11\pi d^3}$$

②軸 CD

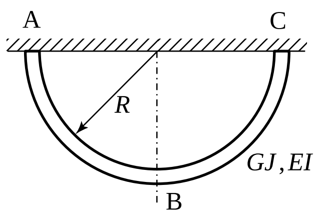
$$\tau_{\max}=\frac{T_{CD}r}{J}=\frac{16T_{CD}}{\pi d^3}=\frac{64T_B}{11\pi d^3}$$

③軸 DF

$$\tau_{\max}=\frac{T_{DF}r}{J}=\frac{16T_{DF}}{\pi d^3}=\frac{32T_B}{11\pi d^3}$$

範題 12

一細長之半圓形圓環，兩端固定保持在水平面上，如圖所示，當集中負荷 P 垂直作用於 B 點時，試求 A 點及 C 點處之反力。



➠此題題目必須利用對稱性來求解。A 及 C 處之垂直斷面切開後，斷面反力中，應無軸向力，剪力 $V_A=V_C=P/2$，彎矩 $M_A=M_C=\ PR/2$，而扭力 $T_A=T_C$，但大小未知。再由應變能 U 對扭矩 T_A 偏微分應等於零，即可解得 T_A。