$$\Rightarrow p=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\overline{x}}\text{，又}\frac{d^2\ln L(p)}{dp^2}=\frac{-n}{p^2}+\frac{-(\sum_{i=1}^{n}x_i-n)}{(1-p)^2}$$

且 $\left.\frac{d^2\ln L(p)}{dp^2}\right|_{P=\frac{1}{\overline{X}}}=\frac{-n\overline{x}^3}{\overline{x}-1}<0$

故知參數 p 之最概似估計式為 $\hat{P}=\frac{1}{\overline{X}}$

例題 14

自母數為 λ 之卜瓦松分配（Poisson distribution）抽出一大小為n的隨機樣本$X_1,X_2,\ldots,X_n$，以估計此一未知母數 λ。

⑴試求 λ 之最概估計量（Maximum likelihood estimator）$\hat{\lambda}$。

⑵驗證此最概估計量 $\hat{\lambda}$ 是否為 λ 之一不偏估計量（Unbiased estimator）。 （94關務三等、99地方政府經行）

Sol：

⑴因 $L(\lambda)=f(x_1;\lambda)\cdots\cdots f(x_n;\lambda)$

$$=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_1}}{x_1!}\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_2}}{x_2!}\cdots\cdots\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_n}}{x_n!}=\frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$$

又 $\ln L(\lambda)=-n\lambda+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\lambda-\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i!\right)$，且

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=-n+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}\text{，令}\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=0\text{，則}$$

$$-n+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}=0\text{，即}\lambda=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\overline{x}$$

又 $\dfrac{d^2 \ln L(\lambda)}{d\lambda^2} = \dfrac{-\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda^2}$，且 $\left.\dfrac{d^2 \ln L(\lambda)}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=\bar{x}} = \dfrac{-\sum_{i=1}^{n} x_i}{\bar{x}^2} = \dfrac{-n}{\bar{x}} < 0$

故知 λ 之最大概似估計式為 $\hat{\lambda} = \bar{X}$ 。

⑵ $E(\hat{\lambda}) = E(\bar{X}) = E\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda = \dfrac{1}{n} n\lambda = \lambda$

故知 $\hat{\lambda} = \bar{X}$ 為母數入之不偏估計式。

例題 15

設 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 為抽自 $N(\mu, \sigma^2)$ 之一組隨機樣本，試求 μ 及 σ^2 之最大概似估計量。

Sol：

因 $L(\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left\{-\dfrac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

又 $\ln L(\mu,\sigma^2) = -\dfrac{n}{2}\ln(2\pi) - \dfrac{n}{2}\ln\sigma^2 - \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$

所以 $\dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu} = \dfrac{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)(-1)}{2\sigma^2}$

$$\dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}$$

又令 $\dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu} = 0$ 且 $\dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = 0$，即可獲得

$$\begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{\sigma^2}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \dfrac{-n}{2\sigma^2}+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

再解此聯立方程式，由第(1)式中可知

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0\text{ ，即}\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu=0\text{ ，所以}\mu=\overline{x}$$

今將 $\mu=\overline{x}$ 代入第(2)式知

$$\frac{-n}{2\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{2\sigma^4}=0\text{ ，即}\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}$$

故參數 μ 之最大概似估計式為 $\hat{\mu}=\overline{X}$

而參數 σ^2 之最大概似估計式為 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n}$

在上述所舉例子中可發現，其求解過程皆有一定程序，但有些概似函數 $L(\theta)$ 並無法以定理㈤之三個步驟求得 MLE 。此時可能要利用數值分析方式來探討才能獲得參數 θ 之 MLE ，且各種不同題型求算方式可能也不同，底下所舉的例子皆爲不可微，因此讀者必須多練習才能獲得解題技巧。

• 例題 16 •

設隨機變數 X 為分布於 $[0,\theta]$，$\theta>0$ 的均匀分配，自此母體隨機抽取 X_1, $X_2,\ldots,X_n$ 之隨機樣本。試以最大概似法（Maximum likelihood estimator）估計 θ，記為 $\hat{\theta}$ 。（95原住民三等、高考）

Sol：

因 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\dfrac{1}{\theta}\cdot\dfrac{1}{\theta}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{\theta}=\dfrac{1}{\theta^n}$

又 $L(\theta)$ 為 θ 之嚴格遞減函數，今欲使 $L(\theta)$ 為最大時，θ 值應該取愈小