第三章　評估準則

評估估計量的準則
- 一、不偏性
- 二、有效性
  - (一)絕對有效
  - (二)相對有效
- 三、一致性
- 四、充分性
  - (一)定義法
  - (二)分解定理
  - (三)指數簇
- 五、完備性

其中充分性與完備性是有助於尋找UMVUE，它們不一定是估計量，但必為統計量。

一、不偏性(unbiasedness)　　(準確性)

若樣本統計量$\hat{\theta}$的期望值等於母體未知參數θ，即$E(\hat{\theta})=\theta$，則稱$\hat{\theta}$為θ之不偏估計量(unbiased estimator)。若$E(\hat{\theta})\neq\theta$，則稱$\hat{\theta}$估計$\theta$為具有偏誤(bias)的偏誤估計量(biased estimator)。

漸近不偏估計量(asymptotic unbiased estimator)

若$\lim\limits_{n\to\infty}E(\hat{\theta})=\theta$，則稱$\hat{\theta}$為$\theta$之漸近不偏估計量。

二、有效性(efficiency)　　(精確性)

衡量有效性的指標為均方差MSE，如下：

均方差(mean squared error，MSE)

$$MSE(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}-\theta)^2=V(\hat{\theta})+[E(\hat{\theta})-\theta]^2$$

(一)絕對有效性(absolute efficiency)：

所有可能的估計量中，均方差MSE最小者，但尋找絕對有效估計量是一件非常不容易的事，因為必須要找出所有可能的估計量，且要一一比較它們的均方差MSE。

(二)相對有效性(relative efficiency)：

若$\hat{\theta}_1$與$\hat{\theta}_2$均為θ之估計量，當$\dfrac{MSE(\hat{\theta}_1)}{MSE(\hat{\theta}_2)}>1$，則稱$\hat{\theta}_2$在估計$\theta$時比$\hat{\theta}_1$更具有效性。

三、一致性(consistency)　　（機率之收斂性）

對任意微小的數ε而言，若$\lim\limits_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}-\theta|\le\varepsilon)=1$，則稱$\hat{\theta}$為$\theta$之一致性估計量(consistent estimator)。

＜註＞一致性估計量的判斷可以$\lim\limits_{n\to\infty}MSE(\hat{\theta})=0$。

證明：$\lim\limits_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}-\theta|\le\varepsilon)\ge\lim\limits_{n\to\infty}[1-\dfrac{E(\hat{\theta}-\theta)^2}{\varepsilon^2}]=\lim\limits_{n\to\infty}[1-\dfrac{MSE(\hat{\theta})}{\varepsilon^2}]$，此式要等於1，就是當$\lim\limits_{n\to\infty}MSE(\hat{\theta})=\lim\limits_{n\to\infty}\{V(\hat{\theta})+[E(\hat{\theta})-\theta]^2\}=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}V(\hat{\theta})=0$及$\lim\limits_{n\to\infty}E(\hat{\theta})=\theta$

四、充分性(sufficiency)　　（資訊足夠）

若$\hat{\theta}$為θ之充分統計量(sufficient statistic)，它就包含了樣本中所有有關母體未知參數θ之全部訊息。(具有資料縮減之功能)

<u>定義</u>：若$f(x_1,x_2,\cdots,x_n|T(x_1,x_2,\cdots,x_n);\theta)$與$\theta$無關，則稱$T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$為$\theta$之充分統計量。

＜註＞ 1. $\hat{\theta}_{MLE}$(唯一)必為充分統計量的函數
2. 充分統計量具有不變性
3. 順序統計量($X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$)必為充分統計量(不具資料縮減)

《例1》

$X\sim f(x;\theta)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n\overset{iid}{\sim}f(x;\theta)$，試證明順序統計量($X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$)為$\theta$之充分統計量。

【解】$f(x_{(1)},x_{(2)},\cdots,x_{(n)};\theta)=n!f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{(1)},x_{(2)},\cdots,x_{(n)};\theta)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n \mid x_{(1)},x_{(2)},\cdots,x_{(n)};\theta)=\dfrac{1}{n!}$ 與 θ 無關，得知順序統計量（$X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$）必為 θ 之充分統計量。

<u>尋找充分統計量的方法：</u>(一)定義法 (二)分解定理 (三)指數簇

（一）定義法：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n \mid T(x_1,x_2,\cdots,x_n);\theta)=\frac{f(x_1,x_2,\cdots,x_n,T(x_1,x_2,\cdots,x_n);\theta)}{f_T(T(x_1,x_2,\cdots,x_n);\theta)}$$ 與

θ 無關，則稱 $T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 為 θ 之充分統計量。

《例2》

$X\sim Ber(p)$，　$X_1,X_2,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} Ber(p)$

試證明 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 為母體未知參數 p 之充分統計量。

【解】設 $S=\sum X_i \sim Bin(n,p)$，$f_S(s)=\binom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s}$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n,s;p)=p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}=p^s(1-p)^{n-s}$$

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n \mid s;p)=\dfrac{1}{\binom{n}{s}}$ 與 p 無關，得知 $S=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 為 p 之充分統計量。

《例3》

令 $\{X_i\}_1^n$ 為一組來自均勻分配(0, θ)之隨機樣本，

(1) 試寫出 θ 之參數空間，並求 θ 之動差估計元 $\hat{\theta}_{MME}$ 及最大概似估計元 $\hat{\theta}_{MLE}$。

(2) 試寫出 θ 之充分統計量 S，並驗證之。

(3) S 是否為 θ 之不偏估計元？若非，試求一常數 c 使 cS 為 θ 之不偏估計元。　　【台大財金、商研】

【解】$X_1,X_2,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} Uniform(0,\theta)$