$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum(Y_i-\hat{Y}_i)^2}{n-3}=\frac{\sum e_i^2}{n-3}=\frac{SSE}{n-3}=MSE$$ （不偏估計式）

$\hat{\sigma}=\sqrt{MSE}$ 稱為迴歸標準誤(standard error of the regression)

證明：以下使用有常態母體假設下之證明方法

$$\frac{(n)\hat{\sigma}^2_{MLE}}{\sigma^2}=\frac{\sum(Y_i-\hat{Y}_i)^2}{\sigma^2}=\frac{\sum e_i^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(n-3)}$$

$$E(\frac{(n)\hat{\sigma}^2_{MLE}}{\sigma^2})=E(\frac{\sum(Y_i-\hat{Y}_i)^2}{\sigma^2})=E(\frac{\sum e_i^2}{\sigma^2})=n-3$$

$$\Rightarrow E(\frac{\sum e_i^2}{n-3})=E(MSE)=\sigma^2$$

＜註＞在 $\varepsilon_i\overset{iid}{\sim}N$ 下，$\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2$ 與 $e_i,\hat{\sigma}^2=MSE$ 相互獨立。

〈補充〉以下各點證明用到正規方程式可得

1. $\bar{\hat{Y}}=\bar{Y}$
2. $\sum e_i=0$
3. e_i 與 $\hat{Y}_i$ 無關（$\sum e_i\hat{Y}_i=0$）
4. e_i 與 X_{1i}，X_{2i} 無關　（$\sum e_iX_{1i}=0$ 與 $\sum e_iX_{2i}=0$）

第三節　偏相關係數與複判定係數

一、偏相關係數(partial correlation coefficient)

在本章包含兩自變數之複迴歸模型中，研究者可以得到以下三個相關係數：

r_{Y1} ：Y與 X_1 之相關係數

r_{Y2} ：Y與 X_2 之相關係數

r_{12} ： X_1 與 X_2 之相關係數

問題：

若 X_2 與Y及 X_1 有相關時，r_{Y1} 就無法真實地反映出Y與 X_1 之關係，同理地，若 X_1 與Y及 X_2 有相關時，r_{Y2} 就無法真實地反映出Y與 X_2 之關係，因此統計學家發展出偏相關係數。

偏相關係數之意義：

把 X_2 對Y及 X_1 之影響淨化，從中求出一個能夠真實地反映出Y對 X_1 之相關係數，稱為偏相關係數 $r_{Y1\bullet2}$。把 X_1 對Y及 X_2 之影響淨化，從中求出一個能夠真實地反映出Y對 X_2 之相關係數，稱為偏相關係數 $r_{Y2\bullet1}$。

接下來，就要介紹如何計算偏相關係數：

(一)利用淨化影響之觀念去推導偏相關係數

前述 $e=\hat{a}_0+\hat{a}_1\eta$ 已淨化 X_2 對Y及 X_1 之影響

因此 $r_{Y1\bullet2}=r_{e\eta}=\dfrac{\sum(e_i-\bar{e})(\eta_i-\bar{\eta})}{\sqrt{\sum(e_i-\bar{e})^2}\sqrt{\sum(\eta_i-\bar{\eta})^2}}=\dfrac{\sum e_i\eta_i}{\sqrt{\sum e_i^2}\sqrt{\sum\eta_i^2}}$

但實際上，研究者也可先計算出兩兩之相關係數後，再利用以下公式計算：

$$r_{Y1\bullet2}=\frac{r_{Y1}-r_{Y2}r_{12}}{\sqrt{(1-r_{Y2}^2)(1-r_{12}^2)}}\text{，}r_{Y2\bullet1}=\frac{r_{Y2}-r_{Y1}r_{12}}{\sqrt{(1-r_{Y1}^2)(1-r_{12}^2)}}\text{，}$$

$$r_{12\bullet Y}=\frac{r_{12}-r_{Y1}r_{Y2}}{\sqrt{(1-r_{Y1}^2)(1-r_{Y2}^2)}}$$

以上都是固定一個變數下求出來之偏相關係數，在統計上稱為一階偏相關係數。（固定r個變數，就稱r階）

(二)利用偏平方和之觀念去推導偏相關係數（*常考）

$Y_i=\beta_0+\beta_1X_{1i}+\varepsilon_i$	$Y_i=\beta_0+\beta_1X_{1i}+\beta_2X_{2i}+\varepsilon_i$
$SSR(X_1)$	$SSR(X_1,X_2)$
$SSE(X_1)$	$SSE(X_1,X_2)$
$SST(X_1)$	$SST(X_1,X_2)$

其中：(1) $SST(X_1)=SST(X_1,X_2)=SS_Y$

(2) $SSR(X_1,X_2)\geq SSR(X_1)$　　（當 X_1,X_2 無關時等號成立）

(3) $SSE(X_1,X_2)\leq SSE(X_1)$

計算 $SSR(X_1\mid X_2)=SSR(X_1,X_2)-SSR(X_2)=SSE(X_2)-SSE(X_1,X_2)$

因此，$r_{Y1\bullet2}^2=\dfrac{SSR(X_1\mid X_2)}{SSE(X_2)}$，同理地，$r_{Y2\bullet1}^2=\dfrac{SSR(X_2\mid X_1)}{SSE(X_1)}$

推廣至二階偏相關係數，例：$r_{Y12\bullet34}^2=\dfrac{SSR(X_1,X_2\mid X_3,X_4)}{SSE(X_3,X_4)}$

<註>1. 總變異(SST)與自變數之個數無關

2. 當 X_1, X_2 無關時，$SSR(X_1, X_2) = SSR(X_1)$ 與 $SSE(X_1, X_2) = SSE(X_1)$

3. 電腦報表(SAS)：設應變數Y，自變數 X_1, X_2, X_3

Source	df	Type I SS	Type III SS
X_1	1	$SSR(X_1)$	$SSR(X_1 \mid X_2, X_3)$
X_2	1	$SSR(X_2)$	$SSR(X_2 \mid X_1, X_3)$
X_3	1	$SSR(X_3)$	$SSR(X_3 \mid X_1, X_2)$

二、複判定係數(multiple coefficient of determination)

定義：一個應變數及k個自變數之迴歸模型下，則稱 $R^2_{Y12\cdots k}$ 為複判定係數，

$$R^2_{Y12\cdots k} = \frac{SSR(X_1, X_2, \cdots, X_k)}{SST}$$

$$R^2_{Y1} = \frac{SSR(X_1)}{SST} = \frac{\hat{\beta}_1^2 SS_1}{SS_Y} = \frac{\hat{\beta}_1 SS_{1Y}}{SS_Y}$$

$$R^2_{Y12} = \frac{SSR(X_1, X_2)}{SST} = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2}{SST} = \frac{\sum(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} - \overline{Y})^2}{SST}$$

$$= \frac{\sum(\overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X_1} - \hat{\beta}_2 \overline{X_2} + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} - \overline{Y})^2}{SST}$$

$$= \frac{\hat{\beta}_1^2 SS_1 + \hat{\beta}_2^2 SS_2 + 2\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2 SS_{12}}{SS_Y} = \frac{\hat{\beta}_1 SS_{1Y} + \hat{\beta}_2 SS_{2Y}}{SS_Y}$$

當迴歸模型中有一個自變數：$R^2_{Y1} = \dfrac{\hat{\beta}_1 SS_{1Y}}{SS_Y}$

當迴歸模型中有兩個自變數：$R^2_{Y12} = \dfrac{\hat{\beta}_1 SS_{1Y} + \hat{\beta}_2 SS_{2Y}}{SS_Y}$

$\vdots$

當迴歸模型中有k個自變數：$R^2_{Y12\cdots k} = \dfrac{\hat{\beta}_1 SS_{1Y} + \hat{\beta}_2 SS_{2Y} + \cdots + \hat{\beta}_k SS_{kY}}{SS_Y}$

由以上之整理可得知，當自變數個數增加時，複判定係數 R^2 之分子會增加，但分母則維持不變，如此會造成 R^2 必然會增加或相同之情況。其實，若研究者希望得到一個 R^2 解釋能力足夠之迴歸模型時，只要增加自變數即可，但加入之變數是否真正擁有顯著之解釋能力就不得而知。

例：研究所入學考試中統計學成績(應變數)