所以，u^+ 為

$$u^+ = \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}}\,\overline{u}$$

② $\pi_2 = y^+ = \tau_w^a \rho^b \mu^c y$

$$M^0 L^0 T^0 = \left(\frac{M}{LT^2}\right)^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b \left(\frac{M}{LT}\right)^c (L)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M : 0 = a + b + c \\ L \; : 0 = -a - 3b - c + 1 \\ T \; : 0 = -2a - c \end{cases}$$

以上聯立得

$$a = \frac{1}{2},\quad b = \frac{1}{2},\quad c = -1$$

所以，y^+ 為

$$y^+ = \frac{\sqrt{\rho \tau_w}}{\mu} y$$

由①②可得無因次參數式為

$$u^+ = g(y^+)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\rho}{\tau_w}}\,\overline{u} = g\left(\frac{\sqrt{\rho \tau_w}}{\mu} y\right)$$

6-2 無因次參數

本節將介紹在流體力學中，較常出現之無因次參數，並且定義每一個無因次參數之名稱，以及所含之物理意義。

首先，吾人列出流場之各種作用力，並以常出現之物理量表示：

(1)慣性力 $= ma \sim mV\dfrac{dV}{ds} \sim \rho \ell^3 V \dfrac{V}{\ell} = \rho \ell^2 V^2$

(2)黏滯力 $= \tau A = \mu \dfrac{\partial V}{\partial n} A \sim \mu \dfrac{V}{\ell} \ell^2 = \mu \ell V$

(3)壓力 $= \Delta P A \sim \Delta P \ell^2$

(4)重力 $= mg \sim \rho \ell^3 g$

(5)可壓縮力 $= BA = \rho \dfrac{\partial P}{\partial \rho} A \sim \rho C^2 \ell^2$

(6)表面張力 $= \sigma \ell$

(7)離心力 $= mr\omega^2 \sim \rho \ell^3 \ell \omega^2 = \rho \ell^4 \omega^2$

1. 雷諾數（Reynolds number）Re

$$\boxed{\mathrm{Re} = \frac{\rho V \ell}{\mu} = \frac{\text{慣性力}}{\text{黏滯力}}} \qquad (6\text{-}2.1)$$

其中 ℓ 爲特徵長度。若特徵長度爲直徑 D，則 Re 之 ℓ 以 D 取代。

上式物理意義可由以下推得

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V \ell}{\mu} \sim \frac{\rho \ell^2 V^2}{\mu \ell V} = \frac{\text{慣性力}}{\text{黏滯力}} \qquad (\text{可對照①②式})$$

在流場中主要以雷諾數之大小判別流場是否為層流或紊流之流動。而 Re 之物理意義為慣性力與黏滯力之比值。當 Re 非常大時（$\mathrm{Re} \gg 1$），表示慣性力遠大於黏滯力；反之，當 Re 非常小時（$\mathrm{Re} \ll 1$），表示慣性力遠小於黏滯力，吾人定義此流動稱為潛變流（creeping flow）或史托克流（Stoke's flow）。

2. 歐拉數（Euler number）Eu

$$\boxed{\mathrm{Eu} = \frac{\Delta P}{\rho V^2} = \frac{\text{壓力}}{\text{慣性力}}} \qquad (6\text{-}2.2)$$

上式之物理意義可由以下推得

$$\mathrm{Eu} = \frac{\Delta P}{\rho V^2} \sim \frac{\Delta P \ell^2}{\rho V^2 \ell^2} = \frac{\text{壓力}}{\text{慣性力}} \qquad (\text{可對照①③式})$$

在流場中，若壓力差很明顯時，則 Eu 極為重要。

3. 福祿數（Froude number）Fr

$$\boxed{\mathrm{Fr}=\frac{V}{\sqrt{g\ell}}=\frac{\text{慣性力}}{\text{重力}}} \tag{6-2.3}$$

上式之物理意義可由以下推得

$$\mathrm{Fr}^2=\frac{V^2}{g\ell}\sim\frac{\rho\ell^2V^2}{\rho\ell^3 g}=\frac{\text{慣性力}}{\text{重力}} \qquad \text{（可對照①④式）}$$

在流場中，若考慮重力時，則 Fr 為一重要之參數。所以，Fr 在自由表面之流動極為重要，例如船在水面上之航行。

4. 韋伯數（Weber number）We

$$\boxed{\mathrm{We}=\frac{\rho V^2\ell}{\sigma}=\frac{\text{慣性力}}{\text{表面張力}}} \tag{6-2.4}$$

上式之物理意義可由以下推得

$$\mathrm{We}=\frac{\rho V^2\ell}{\sigma}\sim\frac{\rho\ell^2V^2}{\sigma\ell}=\frac{\text{慣性力}}{\text{表面張力}} \qquad \text{（可對照①⑥式）}$$

若流場存在兩種不同流體流動，則在其介面上 We 為一重要參數；We 也出現於氣泡或液滴之流場中。若 $\mathrm{We}\gg 1$，則可忽略表面張力之作用；反之，則表面張力極為重要。

5. 馬赫數（Mach number）M

$$\mathrm{M}=\frac{V}{C}=\frac{\text{慣性力}}{\text{可壓縮力}} \tag{6-2.5}$$

其中 C 爲流場在當時溫度下之音速（sound speed）。
上式之物理意義可由以下推得

$$\mathrm{M}^2=\frac{V^2}{C^2}\sim\frac{\rho\ell^2V^2}{\rho\ell^2C^2}=\frac{\text{慣性力}}{\text{可壓縮力}} \qquad \text{（可對照①⑤式）}$$

若流場中之流體壓縮性較明顯時，則 M 為一重要參數，故 M 常使