5.3.3 投資組合理論

當一投資組合包含兩種以上的證券時，由於這些證券之間價格變動的「方向」與互動的「程度」並不一致，自然可達到降低（或稱分散）該投資組合風險的效果。接下來將以兩種證券爲例，說明投資組合報酬率的標準差乃「小於或等於」個別證券報酬率標準差的加權平均數。

一、兩種證券構成的投資組合

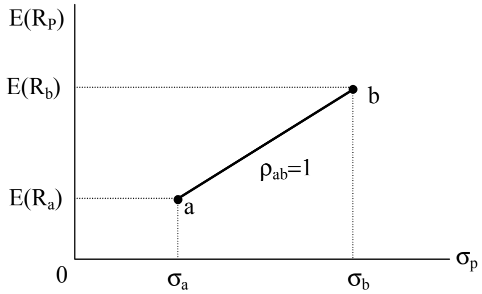
統計學上的相關係數（ρ）可用來衡量兩種證券報酬率間是呈同向還是反向變動的趨勢，相關係數的值介於+1和−1之間。$\rho > 0$，表示兩種證券報酬率間呈同向變動的關係；$\rho < 0$，表示兩種證券報酬率間呈反向變動關係；$\rho = 0$，則表示兩種證券報酬率變動方向並無相關。

㈠**兩種證券報酬率呈完全正相關（相關係數為+1）**：當兩種證券報酬率的相關係數爲+1，投資組合的報酬率與風險將如下式所示。此時，投資組合的報酬率等於個別證券報酬率之「加權平均數」，同時投資組合報酬率的標準差也「等於」個別證券報酬率標準差之「加權平均數」，故並無法藉由投資組合來分散其風險。如【圖5-5】所示，a、b兩種證券報酬率之相關係數爲+1，其構成之各種投資組合即爲 $\overline{ab}$ 。

$$E(R_p) = w_a \times E(R_a) + w_b \times E(R_b)$$

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= w_a^2 \times \sigma_a^2 + w_b^2 \times \sigma_b^2 + 2w_a w_b \sigma_{ab} \\ &= w_a^2 \times \sigma_a^2 + w_b^2 \times \sigma_b^2 + 2w_a \times w_b \times \rho_{ab} \times \sigma_a \times \sigma_b \\ &= w_a^2 \times \sigma_a^2 + w_b^2 \times \sigma_b^2 + 2w_a \times w_b \times 1 \times \sigma_a \times \sigma_b \\ &= (w_a \times \sigma_a + w_b \times \sigma_b)^2\end{aligned}$$

$$\sigma_p = w_a \sigma_a + w_b \sigma_b \tag{5-15}$$



【圖5-5】 投資組合的風險與報酬：相關係數=+1

22 相關係數為+1時之投資組合報酬率標準差 Easy

若一投資人擇有二種股票：A股票的預期報酬率為15%，B股票為20%，標準差分別為15%與21%，但二股票的相關係數為+1，若A、B二種股票的投資金額分別為10萬與20萬元，則其投資組合的報酬率標準差為：

(A)15.7%　(B)18.6%
(C)19.0%　(D)20.3%。【90年高考】

(C)

23 相關係數與風險分散 Easy

When the correlation coefficient between the returns on two securities is equal to ________, the total risk of the portfolio of the two securities is less than the weighted average of the total risk of the two individual securities.

(A)−1　(B)0
(C)0.9　(D)+1
(E)(A) and (B)　(F)(A), (B), and (C)
(G)All of the above.【90年逢甲財金所】

(F)

㈡**兩種證券報酬率呈完全負相關（相關係數為−1）**：當兩種證券報酬率間的相關係數為 −1時，投資組合的報酬率與風險將如下式所示。此時，投資組合的報酬率仍爲個別證券報酬率之「加權平均數」，但投資組合報酬率的標準差卻是個別證券報酬率標準差乘以其權重後的「差值」，而「非」個別證券報酬率標準差之加權平均數。

$$E(R_p) = w_a \times E(R_a) + w_b \times E(R_b)$$

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= w_a^2 \times \sigma_a^2 + w_b^2 \times \sigma_b^2 + 2w_a w_b \sigma_{ab} \\ &= w_a^2 \times \sigma_a^2 + w_b^2 \times \sigma_b^2 + 2w_a \times w_b \times \rho_{ab} \times \sigma_a \times \sigma_b \\ &= w_a^2 \times \sigma_a^2 + w_b^2 \times \sigma_b^2 + 2w_a \times w_b \times (-1) \times \sigma_a \times \sigma_b \\ &= (w_a \times \sigma_a - w_b \times \sigma_b)^2\end{aligned}$$

$$\sigma_p = \left| w_a \times \sigma_a - w_b \times \sigma_b \right| \tag{5-16}$$

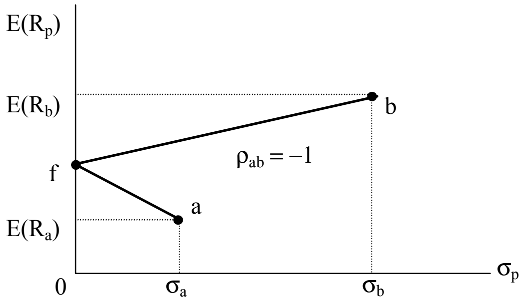
須特別注意的是，當兩種證券報酬率的相關係數呈−1時，還可以找到「唯一一組」完全沒有風險（即 $\sigma_p = 0$ ）的投資組合（ w_a^*, w_b^* ）。其求法如下：

$$\begin{cases} \sigma_p^2 = (w_a\sigma_a - w_b\sigma_b)^2 = 0 \\ w_a + w_b = 1 \end{cases} \quad \text{或} \begin{cases} \dfrac{w_a}{w_b} = \dfrac{\sigma_b}{\sigma_a} \\ w_a + w_b = 1 \end{cases}$$

即可解出：

$$w_a^* = \frac{\sigma_b}{\sigma_a + \sigma_b} \text{，} w_b^* = \frac{\sigma_a}{\sigma_a + \sigma_b} \tag{5-17}$$

如【圖5-6】所示，a、b兩種證券報酬率的相關係數爲−1，其構成之投資組合爲 $\overline{bf}$ 及 $\overline{af}$ 。f點即爲無風險的投資組合（ w_a^*, w_b^* ），或$\sigma_f = 0$。



【圖5-6】 投資組合的風險與報酬：相關係數=–1

24 相關係數為–1下之投資組合總風險 Easy

The next three questions refer to the following data:

Security	Expected return	Variance
A	0.10	0.38
B	0.09	0.36
C	0.11	0.42
D	0.12	0.49

If Correlation(r_B, r_D) = –1, and $Weight_B$ = 1/2. $Weight_D$ = 1/2, what will be this portfolio's standard deviation?

(A)0.0 (B)0.05

(C)0.10 (D)0.15

(E)None of the above. 【90成大財金所】

(B)

25 零風險投資組合特性 Intermediate

Consider two perfectly negatively correlated risky securities, A and B. Security A has an expected return of 16% and a standard deviation of return of 20%. B has an expected return of 10% and a standard deviation of return of 30%.

(一)What is the proportion of the minimum variance portfolio that should be invested in security B?

㈡What is the expected return on the minimum variance portfolio?

㈢What is the standard deviation of return on the minimum variance portfolio? 【95年高雄第一科大財管所】

㈠$\begin{cases} W_A \times \sigma_A = W_B \times \sigma_B \\ W_A + W_B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W_A \times 20\% = W_B \times 30\% \\ W_A + W_B = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow W_A = \frac{3}{5}$，$W_B = \frac{2}{5}$

㈡ $E(R_P) = W_A \times E(R_A) + W_B \times E(R_B)$

$= \frac{3}{5} \times 16\% + \frac{2}{5} \times 10\% = 13.6\%$

㈢ $\rho = -1$時，風險極小化投資組合=無風險投資組合，其σ_P必定為0。

㈢兩種證券報酬率相關係數介於−1與+1之間：

1. 不允許放空：當兩種證券報酬率呈「不完全」正相關或負相關時，投資組合報酬率仍爲個別證券報酬率之「加權平均數」，但亦可由下列公式獲得「一組」風險最低的投資組合（w_a^*, w_b^*）。該組合雖能分散部分風險，但仍無法消除全部的風險，我們稱之爲最小變異數投資組合。由此可知，只要兩種證券報酬率的相關係數「不爲」+1，即可藉由多角化達到分散風險的目的，且相關係數愈小，風險分散的效果就愈好，投資組合的總風險也會愈小。

$$E(R_p) = w_a \times E(R_a) + w_b \times E(R_b)$$

$$\sigma_p^2 = w_a^2 \times \sigma_a^2 + w_b^2 \times \sigma_b^2 + 2 w_a w_b \sigma_{ab}$$

$$= w_a^2 \times \sigma_a^2 + w_b^2 \times \sigma_b^2 + 2 w_a \times w_b \times \rho_{ab} \times \sigma_a \times \sigma_b$$

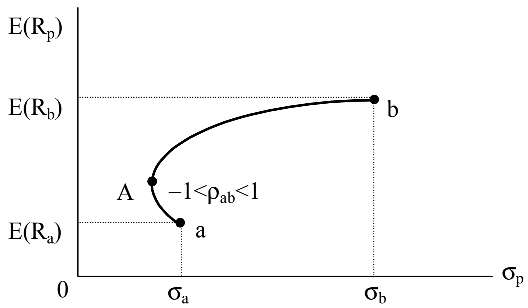
令 $\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial w_a} = 0$

即可解出[2]：

$$w_a^* = \frac{\sigma_b^2 - \sigma_{ab}}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_{ab}} = \frac{\sigma_b^2 - \rho_{ab}\sigma_a\sigma_b}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b}$$

$$w_b^* = 1 - w_a^* \qquad (5\text{-}18)$$

如【圖 5-7】所示，A 點即爲最小變異數投資組合（w_a^*, w_b^*），因爲由a、b兩證券所構成的所有組合中（$\overset{\frown}{ab}$），A 組合之標準差（σ_p）爲最小。



【圖5-7】 投資組合風險與報酬：−1 <相關係數 < +1

---

2 $\sigma_p^2 = w_a^2\sigma_a^2 + w_b^2\sigma_b^2 + 2w_aw_b\sigma_{ab}$

令 $w_b = (1 - w_a)$

則 $\sigma_p^2 = w_a^2\sigma_a^2 + (1-w_a)^2\sigma_b^2 + 2w_a(1-w_a)\ \sigma_{ab}$

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial w_a} = 0$$

$\Rightarrow 2w_a\sigma_a^2 + 2(1-w_a)(-1)\sigma_b^2 + 2\sigma_{ab} - 4w_a\sigma_{ab} = 0$

$\Rightarrow w_a[\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\ \sigma_{ab}] = \sigma_b^2 - \sigma_{ab}$

$$w_a = \frac{\sigma_b^2 - \sigma_{ab}}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_{ab}}$$

同理，$w_b = \dfrac{\sigma_a^2 - \sigma_{ab}}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_{ab}}$

26 風險極小化投資組合 Easy

You are given the following information on stock A and B.

・Covariance between stock A and B is 0.03.

・Variance of Stock $A = 0.0625$.

・Standard Deviation of Stock $B = 0.12$.

Assuming that you must construct a portfolio using only these two stocks, the constructed minimum variance portfolio is ______. (show the portfolio weight in each stock)

【95年高雄第一科大金融營運所】

$$W_A^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{AB}} = \frac{(0.12)^2 - 0.03}{0.0625 + (0.12)^2 - 2 \times 0.03} = -0.9231$$

$$W_B^* = 1 - W_A^* = 1 - (-0.9231) = 1.9231$$

表示利用自有資金（1）及放空A股票所得款項（0.9231）全部投資B股票（1.9231）。

27 風險極小化投資組合報酬率 Intermediate

Stock A has an expected return of 20% and Stock B has an expected return of 12%. The risk of Stock A as measured by the variance is three times that of Stock B. If the correlation coefficient between the two stocks is zero, what is the expected return on the minimum variance portfolio?

(A) 16%　　(B) 14%

(C) 12%　　(D) 20%.

【95年清大科管所】

(B)；

$$W_A^* = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_{AB}} = \frac{\sigma_B^2}{3\sigma_B^2 + \sigma_B^2} = \frac{1}{4}$$

$$W_B^* = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow E(R_P) = \frac{1}{4} \times 20\% + \frac{3}{4} \times 12\% = 14\%$$

28 風險極小化投資組合 Hard

Suppose that you are considering investing a portfolio of three assets. The basic statistics of the three assets are as follows:

	Asset 1	Asset 2	Asset 3
Expected Return	10%	20%	30%
Standard Deviation	30%	40%	50%
Correlation	1	－0.3	0
		1	0
			1

What is the optimal weight of each asset to minimize the risk of the portfolio given a required rate of return to be 25%?

【95年台科大財金所】

$$\text{Min } \sigma_P^2 = W_1^2\sigma_1^2 + W_2^2\sigma_2^2 + W_3^2\sigma_3^2 + 2W_1W_2\sigma_{12} + 2W_2W_3\sigma_{23} + 2W_1W_3\sigma_{13}$$

$$= W_1^2 \times (0.3)^2 + W_2^2 \times (0.4)^2 + W_3^2 \times (0.5)^2 + 2W_1W_2 \times 0.3 \times 0.4 \times (-0.3)$$

$$= 0.09W_1^2 + 0.16W_2^2 + 0.25W_3^2 - 0.072W_1W_2$$

$$\text{s.t. } W_1 + W_2 + W_3 = 1$$

$$0.1W_1 + 0.2W_2 + 0.3W_3 = 0.25$$

$$\mathcal{L} = 0.09W_1^2 + 0.16W_2^2 + 0.25W_3^2 - 0.072W_1W_2 + \lambda_1(W_1 + W_2 + W_3 - 1) + \lambda_2(0.1W_1 + 0.2W_2 + 0.3W_3 - 0.25)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_1} = 0.18W_1 - 0.072W_2 + \lambda_1 + 0.1\lambda_2 = 0$$