

附錄 推導永續債券及浮動利率債券存續期間

一、永續債券之存續期間

$$\text{存續期間} = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{CF_t \cdot t}{(1+r)^t}}{P}$$

(一)分母部分：永續債券價格(P) = $\frac{I}{r}$

(二)分子部分：由於永續債券之現金流量僅有利息而無到期之還本本金，故存續期間分子可改為：

$$\sum_{t=1}^n \frac{CF_t \cdot t}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{I \cdot t}{(1+r)^t}$$

$$(三) \text{存續期間} = \frac{\text{分子}}{\text{分母}} = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} \frac{I \cdot t}{(1+r)^t}}{\frac{I}{r}} = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} \frac{t}{(1+r)^t}}{\frac{1}{r}}$$

$$\text{其中 } \sum_{t=1}^{\infty} \frac{t}{(1+r)^t}$$

$$= \frac{1}{(1+r)^1} + \frac{2}{(1+r)^2} + \frac{3}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{\infty}{(1+r)^{\infty}}$$

$$= \frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^{\infty}} \Rightarrow (A)$$

$$+ \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^{\infty}} \Rightarrow (B)$$

$$+ \frac{1}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^{\infty}} \Rightarrow (C)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{(1+r)^{\infty}}$$

⋮

⋮

⇒ (∞)

$$\begin{aligned}
&= (A) + (B) + (C) + \dots + (\infty) \\
&= \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \times \frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{r} \times \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{r} \times \frac{1}{(1+r)^\infty} \\
&= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \dots + \frac{1}{(1+r)^\infty} \right] \\
&= \frac{1}{r} \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{(1+r)}} \right] \\
&= \frac{1}{r} \times \frac{(1+r)}{r} = \frac{(1+r)}{r^2}
\end{aligned}$$

$$\text{故存續期間} = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} \frac{t}{(1+r)^t}}{\frac{1}{r}} = \frac{\frac{(1+r)}{r^2}}{\frac{1}{r}} = \frac{1+r}{r}$$

二、浮動利率債券之存續期間

由8.2節中浮動利率債券的評價公式可整理如下：

$$\begin{aligned}
P_0 &= \sum_{t=1}^n \frac{\tilde{I}}{(1+r)^t} + \frac{M}{(1+r)^n} \\
&= \frac{\tilde{I}}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^1} \times \left[\sum_{t=1}^{n-1} \frac{\tilde{I}}{(1+r)^t} + \frac{M}{(1+r)^{n-1}} \right] \quad (8-8A)
\end{aligned}$$

又浮動利率債券在第1期（即下一次利率重設日）的價格為：

$$P_1 = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\tilde{I}}{(1+r)^t} + \frac{M}{(1+r)^{n-1}} \quad (8-8B)$$

將公式（8-8B）代入浮動利率債券的價格公式，（公式8-8A）可表示為：

$$P_0 = \frac{\tilde{I}}{(1+r)^1} + \frac{P_1}{(1+r)^1} \quad (8-8C)$$

由此可知，浮動利率債券價格係由下一次利率重設日之債券價格（ P_1 ）及當次利息收入的折現值決定，又下一次利率重設日時浮動利率

債券的價格（ P_1 ）將等於債券面額（ M ），因此我們可將浮動利率債券看成是「在下一次利率重設日一次債券面額（ M ）及利息的零息債券」，到期期間為目前至下一次利率重設日。又因零息債券的存續期間等於其到期期間，故浮動利率債券的存續期間即為目前至下一次利率重設日的間隔期間。