

## 附錄 推導永續債券及浮動利率債券存續期間

### 一、永續債券之存續期間

$$\text{存續期間} = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{CF_t \cdot t}{(1+r)^t}}{P}$$

(一)分母部分：永續債券價格(P) =  $\frac{I}{r}$

(二)分子部分：由於永續債券之現金流量僅有利息而無到期之還本本金，故存續期間分子可改為：

$$\sum_{t=1}^n \frac{CF_t \cdot t}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{I \cdot t}{(1+r)^t}$$

$$(三) \text{存續期間} = \frac{\text{分子}}{\text{分母}} = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} \frac{I \cdot t}{(1+r)^t}}{\frac{I}{r}} = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} \frac{t}{(1+r)^t}}{\frac{1}{r}}$$

$$\text{其中 } \sum_{t=1}^{\infty} \frac{t}{(1+r)^t}$$

$$= \frac{1}{(1+r)^1} + \frac{2}{(1+r)^2} + \frac{3}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{\infty}{(1+r)^{\infty}}$$

$$= \frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^{\infty}} \Rightarrow (A)$$

$$+ \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^{\infty}} \Rightarrow (B)$$

$$+ \frac{1}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{1}{(1+r)^{\infty}} \Rightarrow (C)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{(1+r)^{\infty}}$$

⋮

⋮

$$\Rightarrow (\infty)$$

$$\begin{aligned}
&= (A) + (B) + (C) + \dots + (\infty) \\
&= \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \times \frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{r} \times \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{r} \times \frac{1}{(1+r)^\infty} \\
&= \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \dots + \frac{1}{(1+r)^\infty} \right] \\
&= \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{1 - \frac{1}{(1+r)}} \right] \\
&= \frac{1}{r} \times \frac{(1+r)}{r} = \frac{(1+r)}{r^2}
\end{aligned}$$

$$\text{故存續期間} = \frac{\sum_{t=1}^{\infty} \frac{t}{(1+r)^t}}{\frac{1}{r}} = \frac{\frac{(1+r)}{r^2}}{\frac{1}{r}} = \frac{1+r}{r}$$

## 二、浮動利率債券之存續期間

由8.2節中浮動利率債券的評價公式可整理如下：

$$\begin{aligned}
P_0 &= \sum_{t=1}^n \frac{\tilde{I}}{(1+r)^t} + \frac{M}{(1+r)^n} \\
&= \frac{\tilde{I}}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^1} \times \left[ \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\tilde{I}}{(1+r)^t} + \frac{M}{(1+r)^{n-1}} \right] \quad (8-8A)
\end{aligned}$$

又浮動利率債券在第1期（即下一次利率重設日）的價格為：

$$P_1 = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\tilde{I}}{(1+r)^t} + \frac{M}{(1+r)^{n-1}} \quad (8-8B)$$

將公式（8-8B）代入浮動利率債券的價格公式，（公式8-8A）可表示為：

$$P_0 = \frac{\tilde{I}}{(1+r)^1} + \frac{P_1}{(1+r)^1} \quad (8-8C)$$

由此可知，浮動利率債券價格係由下一次利率重設日之債券價格（ $P_1$ ）及當次利息收入的折現值決定，又下一次利率重設日時浮動利率

債券的價格 ( $P_1$ ) 將等於債券面額 ( $M$ )，因此我們可將浮動利率債券看成是「在下次利率重設日一次債券面額 ( $M$ ) 及利息的零息債券」，到期期間為目前至下次利率重設日。又因零息債券的存續期間等於其到期期間，故浮動利率債券的存續期間即為目前至下次利率重設日的間隔期間。