3.7 指派問題

假設有 n 件不同工作，n 位人員；分派每個人恰作業一件工作，每件工作恰給一個人來作。但因種種的因素（如專長不同），每個人完成各件工作的所需成本（獲得利潤）並不相同。而所謂指派問題就是研究如何將 n 件工作分派給 n 位人員，而使得總成本最小（獲總利潤最大）。

考慮三位作業員指派至三台機器的問題，一位作業員僅能操作業一台機器，一台機器也僅能給一位作業員操作。指派的成本如下表所示：

	機器一	機器二	機器三
作業員一	$500	100	400
作業員二	550	200	500
作業員三	50	300	200

我們可以利用下列幾種方式來描述指派問題：

【第一種方法－線性規劃(BIP)】

令 $x_{ij} \in \begin{cases} 0 & \text{if 第}i\text{位作業員不指派給第}j\text{台機器} \\ 1 & \text{if 第}i\text{位作業員指派給第}j\text{台機器} \end{cases}$

$$\text{Min} \quad z = 500x_{11} + 100x_{12} + 400x_{13} + 550x_{21} + 200x_{22} + 500x_{23} + 50x_{31} + 300x_{32} + 200x_{33}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &= 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{13} &= 1 \end{aligned}$$

【第二種方法－運輸問題】

	機器一	機器二	機器三	供給
作業員一	500	100	400	1
作業員二	550	200	500	1
作業員三	50	300	200	1
需求	1	1	1	3

【第三種方法－指派問題】（匈牙利法則）

◎匈牙利法：

運算前準備工作：

㈠此問題必須為一方陣，若非方陣，要設虛擬行（列），並令其成本為零。

㈡若為利潤問題，要利用機會成本轉成成本問題。

㈢有限制分配方格成本為 M。$M \to \infty$。

演算法：

Step 1：在每一行中每一數同時減去該行最小的數。

Step 2：在每一列中每一數同時減去該列最小的數。

Step 3：檢定是否能得到最適的指派，這完全決定於通過所有零的直線之最少數目為何。如果直線的數目等於列數，就可能有一最適指派，此時可進行Step 6 否則進行步驟4。

Step 4：如果直線數少於列數，則可依下面方式修正：

1. 把未劃線的數字中最小的數，從每個未劃線 (uncovered) 數字中減去。

*2.*把未劃線數字中最小的數，加到直線交叉的數字中。

Step 5：重複Step 3 與Step 4，直到達到最適表格之形式。

Step 6：開始進行指派，從只有一個零的行或列開始，每一行列只使用一種配合來配對有零的項目。

⑴每一行減去該行最小值

	機器一	機器二	機器三	Min
作業員一	500_{-100}	100_{-100}	400_{-100}	100
作業員二	550_{-200}	200_{-200}	500_{-200}	200
作業員三	50_{-50}	300_{-50}	200_{-50}	50

⑵每一列減去該列最小值

	機器一	機器二	機器三
作業員一	400	0	300_{-150}
作業員二	350	0	300_{-150}
作業員三	0	250	150_{-150}
Min	0	0	150

⑶以最少條直線劃去所有0

	機器一	機器二	機器三
作業員一	400	0	150
作業員二	350	0	150
作業員三	0	250	0

直線數爲2 ≠ 列數3，需要調整

⑷

	機器一	機器二	機器三
作業員一	400_{-150}	0	150_{-150}
作業員二	350_{-150}	0	150_{-150}
作業員三	0	250_{+150}	0

	機器一	機器二	機器三
作業員一	250	0	0
作業員二	200	0	0
作業員三	0	400	0

⑸以最少條直線劃去所有0

	機器一	機器二	機器三
作業員一	250	0	0
作業員二	200	0	0
作業員三	0	400	0

直線數爲3＝列數3，具有最適指派

⑹開始進行指派

	機器一	機器二	機器三
作業員一	250	0	0
作業員二	200	0	0
作業員三	$\boxed{0}$	0	0

指派結果：

①作業員三指派給機器一

作業員一指派給機器二

作業員二指派給機器三

②作業員三指派給機器一

作業員一指派給機器三

作業員二指派給機器二

範題 9 一次指派模型

韓旭公司正規劃派駐四個營業區的四位業務員候選人選。這四位業務員個別在四個營業區的預估營業額如下表所示。由於公司輪調政策的規定，業務員B無法派駐第1個營業區，業務員A無法派駐第2個營業區。此公司應如何指派這四位業務員，才能使總營業額最高？

營業員	營業區			
	1	2	3	4
A	65	73	55	58
B	90	67	87	75
C	106	86	96	89
D	84	69	79	77

（台科大工管所）

答：

	1	2	3	4	每列最小值
A	41	M	51	48	41
B	M	39	19	31	19
C	0	20	10	17	0
D	22	37	27	29	22