

3-36 統計學 (上)

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 x \cdot \frac{1}{6} dx + 1 \times \left[\frac{5}{6} - \frac{1}{6} \right] + \int_1^2 x \frac{1}{6} dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{12} \right]_0^1 + \frac{4}{6} + \left[\frac{x^2}{12} \right]_1^2 = \frac{1}{12} + \frac{4}{6} + \frac{4}{12} - \frac{1}{12} = 1 \\
 \text{又 } E(X^2) &= \int_0^1 x^2 d\left(\frac{x}{6}\right) + 1^2 \times [F(1) - F(1^-)] + \int_1^2 x^2 d\left(\frac{4+x}{6}\right) \\
 &= \int_0^1 \frac{x^2}{6} dx + 1 \times \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\right) + \int_1^2 \frac{x^2}{6} dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{18} \right]_0^1 + \frac{4}{6} + \left[\frac{x^3}{18} \right]_1^2 = \frac{1}{18} + \frac{4}{6} + \frac{8}{18} - \frac{1}{18} = \frac{20}{18}
 \end{aligned}$$

故知變異數為

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{20}{18} - (1)^2 = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

故選(D)。

(⇒) 變異數之基本性質：

1. $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
2. $Var(aX) = a^2 Var(X)$
3. $Var(b) = 0$; b 為常數
4. $Var(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = E(X)) = 1 \Leftrightarrow P(X = b) = 1$
5. 當隨機變數 X 之變量只有一個點時，此種分配稱之為退化分配 (degenerate distribution)。
6. $Var[g(X)] = E[g(X)^2] - (E[g(X)])^2$
7. 對任意不等於 $E(X)$ 的常數 C ，則

$$Var(X) \leq E[(X - C)^2]$$

三、其他類型的期望值與變異數

(⇒) 截切機率分配之期望值與變異數：

◀ 定義 11 ▶

一個隨機變數 X 之機率分配為 $f(x)$ ，則在已知 $X \in A$ 條件下， X 之機率分配稱為截切機率分配 (truncated probability distribution)，即

$$f(x | X \in A) = \frac{f(x)}{P(X \in A)}, \quad x \in A$$

◀ 定義 12 ▶

已知 $f(x | X \in A)$ 為一截切機率分配，則期望值與變異數分別為

$$(1) E(X | X \in A) = \begin{cases} \sum_{x \in A} xf(x | X \in A) \\ \int_{x \in A} xf(x | X \in A) dx \end{cases}$$

$$(2) Var(X | X \in A) = E(X^2 | X \in A) - [E(X | X \in A)]^2$$



• 例題 29 •

A continuous variable X has p.d.f given by

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x)x^2 & , \text{ if } 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{ o.w} \end{cases}$$

(1) Find the constant k .

(2) Find $f(x | x > 0.5)$.

(3) Find $E(X | X > 0.5)$.

(中正企管)

Sol:

$$(1) \int_0^1 k(1-x)x^2 dx = 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{k}{3}x^3 - \frac{k}{4}x^4 \right]_0^1 = 1 \Rightarrow \frac{k}{3} - \frac{k}{4} = 1 \Rightarrow k = 12$$

$$(2) \text{ 因 } P(X > 0.5) = \int_{0.5}^1 12(1-x) \cdot x^2 dx = \frac{11}{16}$$

故知 $X > 0.5$ 條件下， X 之機率分配為

$$f(x | X > 0.5) = \frac{f(x)}{P(X > 0.5)} = \frac{192}{11}(1-x)x^2 \quad , \quad 0.5 < x < 1$$

$$\begin{aligned} (3) E(X | X > 0.5) &= \int_{0.5}^1 xf(x | X > 0.5)dx \\ &= \int_{0.5}^1 x \frac{192}{11}(1-x)x^2 dx = \frac{39}{55} \end{aligned}$$

• 例題 30 •

設隨機變數 X 之機率分配為

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & , x > 0, \alpha > 0 \\ 0 & , \text{o.w} \end{cases}$$

試求 $E(X | X > 1)$.

(93 中正企管、政大國貿、中央工管)

Sol:

$$\text{因 } P(X > 1) = \int_1^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = [-e^{-\alpha x}]_1^{\infty} = e^{-\alpha}$$

故知 $X > 1$ 條件下， X 之機率分配為

$$f(x | X > 1) = \frac{f(x)}{P(X > 1)} = \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{e^{-\alpha}} = \alpha e^{-\alpha(x-1)} \quad , \quad x > 1$$

所以在 $X > 1$ 條件下 X 之期望值為

$$\begin{aligned} E(X | X > 1) &= \int_1^{\infty} xf(x | X > 1)dx \\ &= \int_1^{\infty} x \cdot \alpha e^{-\alpha(x-1)} dx \quad (\text{令 } y = x - 1) \\ &= \int_0^{\infty} (y+1) \cdot \alpha e^{-\alpha y} dy \\ &= \int_0^{\infty} \alpha y e^{-\alpha y} dy + \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha y} dy \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} (\alpha y) e^{-\alpha y} d(\alpha y) + \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha y} dy \\ &= \frac{1}{\alpha} \Gamma(2) + 1 = \frac{1}{\alpha} + 1 \end{aligned}$$

(⇒) 近似期望值與變異數：

在實務上有些時候母體分配若未知下，常可利用平均數及變異數去求任意函數之近似期望值與變異數。

定理5.

設隨機變數 X 之平均數與變異數為 $E(X) = \mu$ ， $Var(X) = \sigma^2$ ，則某特殊函數 $H(X)$ 之近似期望值與變異數為

$$1. E[H(X)] \doteq H(\mu) + \frac{H''(\mu)}{2!} \sigma^2$$

$$2. Var[H(X)] \doteq [H'(\mu)]^2 \cdot \sigma^2$$

(成大財金)



【證明】

因 $H(X)$ 在 $X = \mu$ 處之泰勒展開式為

$$H(X) = H(\mu) + \frac{H'(\mu)}{1!}(X - \mu) + \frac{H''(\mu)}{2!}(X - \mu)^2 + \dots$$

故知

$$\begin{aligned} E(H(X)) &= E\left(H(\mu) + \frac{H'(\mu)}{1!}(X - \mu) + \frac{H''(\mu)}{2!}(X - \mu)^2 + \dots\right) \\ &= H(\mu) + \frac{H'(\mu)}{1!}E(X - \mu) + \frac{H''(\mu)}{2!}E((X - \mu)^2) + \dots \\ &\doteq H(\mu) + \frac{H''(\mu)}{2!}\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(H(X)) &= Var\left(H(\mu) + \frac{H'(\mu)}{1!}(X - \mu) + \dots\right) \\ &\doteq [H'(\mu)]^2 Var(X - \mu) = [H'(\mu)]^2 \sigma^2 \end{aligned}$$

• 例題 31 •

Suppose $E(X) = \mu$ and $Var(X) = \sigma^2$. Find the approximate mean and variance of:

(1) e^X .

(2) $1/X$ (assuming $\mu \neq 0$).

(89政大國貿、90淡江財金)

Sol:

(1) 因 $H(X) = e^X$ ，且 $H'(X) = e^X$ ， $H''(X) = e^X$ ，故知

$$E(e^X) = e^\mu + \frac{e^\mu}{2} \cdot \sigma^2$$

$$\text{Var}(e^X) = (e^\mu)^2 \cdot \sigma^2$$

(2) 因 $H(X) = \frac{1}{X}$ ，且 $H'(X) = \frac{-1}{X^2}$ ， $H''(X) = \frac{2X}{X^4} = \frac{2}{X^3}$ ，故知

$$E\left(\frac{1}{X}\right) \doteq \frac{1}{\mu} + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{2}{\mu^3}\right) = \frac{1}{\mu} + \frac{\sigma^2}{\mu^3}$$

$$\text{Var}\left(\frac{1}{X}\right) \doteq \left(\frac{-1}{\mu^2}\right)^2 \sigma^2 = \frac{1}{\mu^4} \sigma^2$$

四、偏態與峰態係數

兩個隨機變數期望值與變異數若相同，但並不表示其機率分配相同，因兩分配可能有不同的偏態係數 (coefficient of skewness) 及峰態係數 (coefficient of kurtosis)，接下來我們要探討一個機率分配之偏態與峰態係數。

(一) 偏態係數：

定義 13

隨機變數 X 的三階主要動差若存在，則將其除以標準差立方之值即為其偏態係數，即

$$\beta_1 = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\left[\sqrt{E[(X - \mu)^2]}\right]^3} = \frac{\mu_3}{(\sqrt{\mu_2})^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$



在定義 13 中，若 $\beta_1 > 0$ ，即表示機率分配為右偏分配。