Chapter 8

點估計

8.1 估計之觀念

一、估計之意義

估計（estimation）又稱之爲推定，其意義是指利用樣本統計量去估計母體中未知的參數，其內容又區分爲點估計（point estimation）及區間估計（interval estimation）兩大類。在本章中，將先探討點估計部分，至於區間估計部分將在下一章探討，今先將其意義分述如下。

㈠點估計：

點估計之意義是依據母體抽出的一組樣本資料，求出某個樣本統計量之數值，然後利用此數值去估計母體中未知參數之方法。例如，以樣本比例 $\hat{P}$ 估計母體比例 p ，或利用樣本平均數 $\bar{X}$ 估計母體平均數 μ ，以樣本變異數 S^2 估計母體變異數 σ^2 。

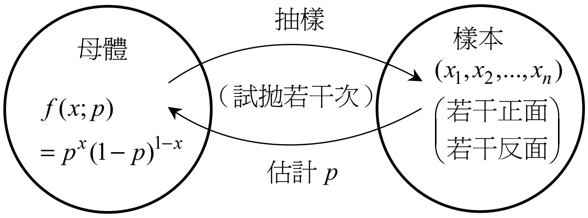

圖8-1　估計之觀念

㈡區間估計：

區間估計之意義是依據一組樣本資料，求出兩個樣本統計量之數值，

形成一個區間，再利用此區間來說明此區間包含此未知母體參數的信心的估計方法。

二、估計式及估計值之意義

利用樣本統計量去估計母體中未知參數時，此樣本統計量即稱爲此參數θ之估計式或估計元（estimator），而當獲取一組樣本資料後計算出此估計式之數值即稱之爲估計值（estimate）。

定義1

設$\hat{\Theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$為一個統計量，若它被使用來估計某一未知參數$\theta$時，則$\hat{\Theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$即稱為參數$\theta$之點估計式，常以符號$\hat{\Theta}$表示之。而當獲取一組實際樣本觀察值$(x_1, x_2, ..., x_n)$所計算出來之$\hat{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n)$，稱為參數$\theta$之點估計值。

例如，以$\bar{X}$及S^2去估計μ及σ^2，則$\bar{X}$及S^2即爲參數μ及σ^2的點估計式，但當獲取一組樣本資料$(x_1, x_2, ..., x_n)$代入上式$\bar{X}$及S^2即可獲得二個確定數值$\bar{x}$及s^2，此兩數值$\bar{x}$及s^2即爲μ及σ^2的點估計值。

8.2 點估計式之評判標準

估計式$\hat{\Theta}(X_1, ..., X_n)$用來估計未知參數$\theta$，但估計式（即樣本統計量）有很多不同形式，因此要如何評判點估計式之優劣，便是點估計的一個重要課題。一般常見之評判標準有下列幾種，即

㈠不偏性（unbiasedness）

㈡有效性（efficiency）

㈢一致性（consistency）

㈣充分性（sufficiency）

茲將各種評判準則之觀念分述如下。

一、不偏性

㈠不偏性觀念：

利用樣本資料$(X_1, X_2, ..., X_n)$求取估計式$\hat{\Theta}$之值時，此估計值與被估計之參數θ會有某種程度上差異，有時高、有時低，因此若估計式的期望值能等於被估計之參數，則表示在做估計時較無偏頗之虞，亦即產生偏誤的可能性亦較小。

㈡不偏性之定義：

定義2

若統計量$\hat{\Theta}$為母體參數θ的一個估計式，且此估計式$\hat{\Theta}$的期望值等於參數θ，即$E(\hat{\Theta}) = \theta$，則稱$\hat{\Theta}$為母體參數θ的不偏估計式（unbiased estimator）。但若$E(\hat{\Theta}) \neq \theta$，則稱$\hat{\Theta}$為參數$\theta$之偏誤估計式（biased estimator），且其偏誤為$E(\hat{\Theta}) - \theta = Bias$。

Remark

1. 設$\hat{\Theta}$為參數θ之估計式，若$E(\hat{\Theta}) \neq \theta$，但

$$\lim_{n \to \infty} E(\hat{\Theta}) = \theta$$

則稱估計式$\hat{\Theta}$為參數θ之極限不偏估計式（asymptotic unbiased estimator）。

2. 設$\hat{\Theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$為參數$\theta$之函數$\pi(\theta)$之估計式，且

$$E\left(\hat{\Theta}(X_1, X_2, ..., X_n)\right) = \pi(\theta)$$

則稱$\hat{\Theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$為函數$\pi(\theta)$之不偏估計式。

由定義2中可知，要評判一個估計式是否爲參數θ之不偏估計式，只要依上述定義求估計式的期望值即可（見圖8-2）。在圖8-2(a)中，可以很明顯地發現$\hat{\Theta}_1$之抽樣分配之期望值$E(\hat{\Theta}_1) = \theta$，故$\hat{\Theta}_1$爲$\theta$之不偏估計式；但在