Chapter 9

區間估計

在前章點估計所討論的內容中，是告訴我們如何求取參數θ之最佳估計式。接下來將探討如何利用最佳估計式之抽樣分配來發展關於參數θ的區間估計（interval estimation）。

9.1 區間估計觀念

一、區間估計之觀念

定義1

設$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$為由參數θ之母體$f(x;\theta)$抽出之一組隨機樣本，令$L(X_1,X_2,\ldots,X_n)$及$U(X_1,X_2,\ldots,X_n)$為兩個統計量，且使得

$$P\big(L(X_1,X_2,\ldots,X_n)\le\theta\le U(X_1,X_2,\ldots,X_n)\big)=1-\alpha$$

則區間

$$\big(L(X_1,X_2,\ldots,X_n),U(X_1,X_2,\ldots,X_n)\big)$$

稱為參數θ之$100(1-\alpha)\%$的隨機區間（random interval）或稱區間估計量（interval estimator）。但當我們獲取確定之一組樣本資料$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$代入上述隨機區間時，則區間

$$\big(L(x_1,x_2,\ldots,x_n),U(x_1,x_2,\ldots,x_n)\big)$$

稱為參數θ之$100(1-\alpha)\%$的信賴區間（confidence interval）或區間估計值（interval estimate）。其中$1-\alpha$稱為信賴係數或信賴度。

定義2

1.若 $P\left(L(X_1,X_2,\ldots,X_n)\le\theta\right)=1-\alpha$ ，則區間

$$\left(L(X_1,X_2,\ldots,X_n),\infty\right)$$

稱為參數 θ 之 $100(1-\alpha)\%$ 之下單尾（one-sided lower）隨機區間。

2.若 $P\left(\theta\le U(X_1,X_2,\ldots,X_n)\right)=1-\alpha$ ，則區間

$$\left(-\infty,U(X_1,X_2,\ldots,X_n)\right)$$

稱為參數 θ 之 $100(1-\alpha)\%$ 之上單尾（one-sided upper）隨機區間。

定義3

設 $\hat{\theta}$ 為參數 θ 之估計式，若 $P(|\hat{\theta}-\theta|\le d)=1-\alpha$ 則 d 稱為以 $\hat{\theta}$ 估計 θ 的 $100(1-\alpha)\%$ 之誤差界限。

二、區間估計推導

通常要尋找某個參數 θ 之區間估計量，必須先尋找樞紐量（pivotal quantity）然後利用樞紐量直接移項求得區間估計量，但一般樞紐量並不容易尋找，但若針對常見參數 μ 、 p 、 σ^2 等參數之樞紐量就較易尋求，茲先給予樞紐量一個定義。

定義4

若 $Q=q(X_1,X_2,\ldots,X_n;\theta)$ 為一隨機變數，其僅為 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 與參數 θ 之函數，其中 θ 為唯一的未知量，且 Q 之機率分配與參數 θ 或其他任何參數無關，則 $Q=q(X_1,X_2,\ldots,X_n;\theta)$ 即稱之為樞紐量。

事實上，找到樞紐量後，即可利用前面所提過之各種抽樣分配，諸如 Z 、 T 、 χ^2 、 F 分配之觀念，來推導信賴區間。爲了方便讀者尋找信賴區間，茲將參數區間估計的過程及步驟敘述如下：

㈠決定未知參數 θ 的最佳點估計式：一般較常用求點估計式之方法為最大概似法。

㈡決定抽樣樣本大小：抽樣樣本的大小影響抽樣分配的建立，故須先決定抽樣樣本的大小。

㈢尋找點估計式的抽樣分配：根據抽樣分配原理為之。

㈣根據點估計式之抽樣分配的觀念來尋找樞紐量，然後再利用此樞紐量來發展信賴區間。

9.2 母體平均數 μ 之估計

母體平均數 μ 之估計是最常見估計問題之一，因樣本平均數 $\bar{X}$ 為參數 μ 之最佳估計式，故可利用 $\bar{X}$ 之抽樣分配來發展 μ 之估計問題。

一、估計誤差及樣本數問題

由第七章可知，當 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 為抽自下列條件的一組隨機樣本，即

㈠抽自非常態母體，且樣本數 $n > 30$ ，或

㈡抽自常態母體，則不論樣本數 n 之大小

時，樣本平均數 $\bar{X}$ 服從常態分配，即

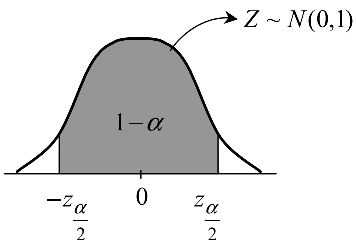
$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

因此由定義3可知

$$P(|\bar{X} - \mu| \le d) = 1 - \alpha \Rightarrow P\left(|Z| \le \frac{d}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

又由標準常態分配知（見右圖）

$$P(|Z| \le z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$



故 $\dfrac{d}{\sigma/\sqrt{n}} = z_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow d = z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

且 $n = \left(\dfrac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{d}\right)^2 \sigma^2$

定理1

設$(X_1,\ldots,X_n)$為抽自任意母體（$n>30$）或常態母體之一組隨機樣本，則以樣本平均數$\overline{X}$估計μ之誤差界限為

$$d=z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

又當誤差界限d已知時，樣本數n為

$$n=\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{d}\right)^2\sigma^2$$

Remark

*1.*在定理1中，若母體變異數σ^2未知，可以樣本變異數s^2估計。

*2.*樣本數n亦可由Chebyshev不等式求解，即

$$n\geq\frac{\sigma^2}{\alpha d^2}$$

【證明】

由切比雪夫不等式可知

$$P(|\overline{X}-\mu|\leq d)\geq 1-\frac{\sigma_{\overline{X}}^2}{d^2}=1-\frac{\sigma^2}{nd^2}$$

又信賴係數為$1-\alpha$，故知

$$1-\frac{\sigma^2}{nd^2}\geq 1-\alpha$$

$$\Rightarrow n\geq\frac{\sigma^2}{\alpha d^2}$$

例題 1

A bankofficer wants to determine the amount of the average total monthly deposits per customer at the bank. He believes an estimate of this average amount using a confidence interval is sufficient. How large a sample should he take to be within \$200 of the actual average with 99% confidence? He assumes the standard deviation of total monthly deposits for all customers is about \$1000.

（91淡江財金10%、95政大金融）

Sol：

$$P(|\bar{X}-\mu|\le 200)=0.99 \Rightarrow P\left(|Z|\le \frac{200}{1000/\sqrt{n}}\right)=0.99$$

又知$P(|Z|\le 2.576)\doteqdot 0.99$，故知

$$\frac{200}{1000/\sqrt{n}}\doteqdot 2.576 \Rightarrow n=\left(\frac{2.576}{200}\right)^2(1000)^2\doteqdot 165.89$$

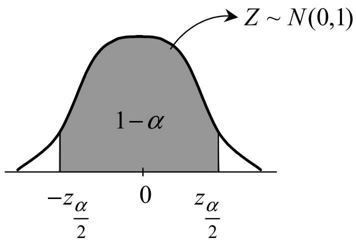
故取樣本數$n=166$

二、區間估計

㈠抽自非常態母體且σ^2已知，$n>30$：

因$\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$，今將其標準化知

$$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$



可為樞紐量，又由右圖知

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}}\le Z\le z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}}\le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\le z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha$$

$$\Rightarrow P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le \bar{X}-\mu\le z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$