

Chapter 8

圖 形(Graphs)

8-1 名詞定義(Terminology and Definitions)

✧ 要點：圖形的定義

圖形 $G=(V,E)$ ，其中

$V(G)$ ：一群頂點(vertices 或 nodes)的集合

$E(G)$ ：一群邊(edges 或 arcs)所成的集合

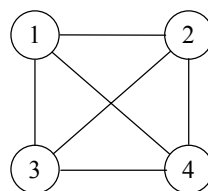
✧ 要點：圖形的分類

1. 無向圖(Undirected Graph)：邊的兩端點是無序的(unordered)或無方向性的，其邊的表示法是以 (v_i, v_j) 表示，其中 v_i 、 v_j 是兩端點，且 $(v_i, v_j)=(v_j, v_i)$ 。
2. 有向圖(Directed Graph，簡稱為 digraph)：邊的兩端點是以有向數對(directed pairs) $\langle v_i, v_j \rangle$ 來表示，且 $\langle v_i, v_j \rangle \neq \langle v_j, v_i \rangle$ 。

➤ 範例： G_1

$$V(G_1)=\{1,2,3,4\}$$

$$E(G_1)=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

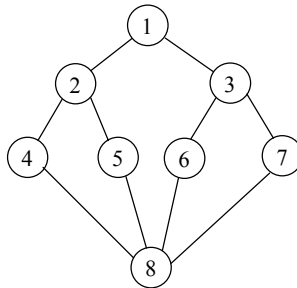


➤ 範例： G_2

$$V(G_2)=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

$$E(G_2)=\{(1,2),(1,3),(2,4),(2,5),(3,6),(3,7),(4,8),(5,8),(6,8),(7,8)\}$$

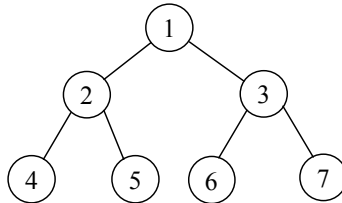
8-2 資料結構



➤ 範例： G_3

$$V(G_3) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

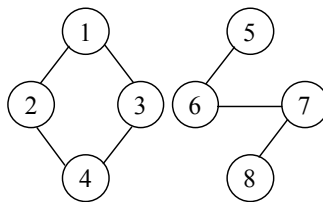
$$E(G_3) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 6), (3, 7)\}$$



➤ 範例： G_4

$$V(G_4) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

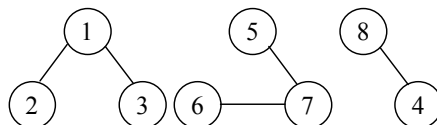
$$V(E_4) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (5, 6), (6, 7), (7, 8)\}$$



➤ 範例： G_5

$$V(G_5) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

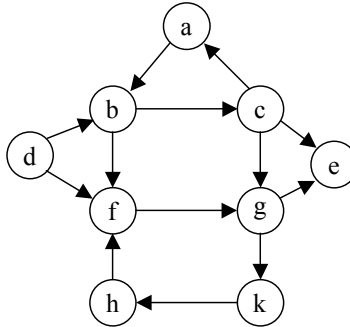
$$V(E_5) = \{(1, 2), (1, 3), (4, 8), (5, 6), (5, 7)\}$$



➤ 範例： G_6

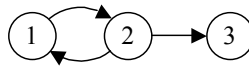
$$V(G_6) = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k\}$$

$$E(G_6) = \{ \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, f \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, e \rangle, \langle c, g \rangle, \langle d, b \rangle, \langle d, f \rangle, \langle f, g \rangle, \langle g, e \rangle, \langle g, k \rangle, \langle h, f \rangle, \langle k, h \rangle \}$$

➤ 範例： G_7

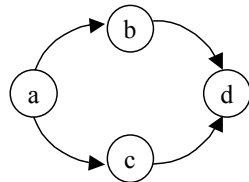
$$V(G_7) = \{1, 2, 3\}$$

$$E(G_7) = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \}$$

➤ 範例： G_8

$$V(G_8) = \{a, b, c, d\}$$

$$E(G_8) = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle, \langle c, d \rangle \}$$



✧ 要點：圖形相關用語與定義

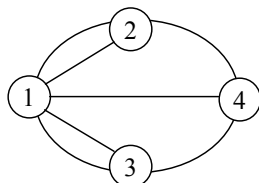
1. 完全圖形(Complete Graph)

- (1) 若一個無向圖中，任意兩個頂點間皆有 edge 存在，則稱為完全圖形，例如前圖的 G_1 。

8-4 資料結構

(2) 若有 n vertices，則共有 $\frac{n(n-1)}{2}$ edges。

2. 多重圖形(Multi-graph)：若在一個圖形中，同一個edge重複許多次，則稱為多重圖形，例如，下圖即為多重圖形。



3. 子圖(Sub-graph)：由圖形 G 中取出部分集合 G' ，換言之， $V(G')$ 為 $V(G)$ 的部分集合， $E(G')$ 亦為 $E(G)$ 的部分集合。
4. 完全子圖(Clique)：由圖形 G 中的子圖 G' ，若 G' 為完全圖形，則 G' 稱為 G 的 clique。
5. 路徑(Path)：由 v_p 到 v_q 的路徑是一組頂點序列 $v_p = v_{i0}, v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in} = v_q$ ，其中 (v_{i0}, v_{i1}) 、 (v_{i1}, v_{i2}) 、 $\dots$ 、 (v_{in-1}, v_q) 是圖形中的 edges。其路徑長度(path length)為 n ，即所經過的邊的個數。
6. 簡單路徑(Simple Path)：在一路徑中，除了起點與終點可以相同之外(不同亦可)，其餘頂點不可以重複。
7. 迴路(Cycle)：圖形中的迴路是一條路徑，且必須符合下列兩要求
- (1) 是一條簡單路徑(simple path)。
 - (2) 起點與終點是同個頂點。
8. 毗鄰(Adjacent)：圖形中的兩頂點 v_i 與 v_j (且 $v_i \neq v_j$) 之間存在有 edge，則稱 v_i 與 v_j 為 adjacent vertices。
9. 附著(Incident)：無向圖形中的邊 (v_i, v_j) incident to v_i ， (v_i, v_j) 也 incident to v_j ；有向圖形中的邊 (v_i, v_j) incident from v_i ， (v_i, v_j) 也 incident to v_j 。
10. 連通(Connected)：圖形中的兩頂點 v_i 與 v_j (且 $v_i \neq v_j$) 之間存在有 path，則稱 v_i 與 v_j 為 connected vertices。
11. 連通圖形(Connected Graph)：若在一無向圖形中任意兩個頂點 v_i 與 v_j ($v_i \neq v_j$) 皆連通，則整個圖形稱為連通圖形。
12. 連通單元(Connected Component)：將無向圖形分解為數個分離子圖(disjoint subgraph)，且使得原圖形中連通頂點仍屬於同一個子圖，