第八章 拉卜拉斯(Laplace)變換之應用

8-1 以 Laplace Transform 解 O.D.E.

⇨重點整理⇦

1.**學習目的**：

不用微分也不用積分，直接用簡單的代數方法，來求解**具備有初始值**的**線性微分方程式**。

2. **初始值問題** (**I.V.P.**)：

具備有**初始值**的**線性微分方程式**，稱之為**初始值問題**(Initial Value Problem, **I.V.P.**)。

3. **解題步驟**：

(1) 將**具備有初始值**的**線性微分方程式**，也就是所謂的**初始值問題**(**I.V.P.**)，透過**拉卜拉斯(Laplace)變換**轉換成另一個變數 s 的**代數問題**(Algebraic Problem, **A.P.**)。

(2) 用簡單的代數方法(如：加減乘除)，來求解變數 s 的**代數問題**。

(3) 將變數 s 的解**逆轉換**回來，得到原本 **I.V.P.**的解。

4. **流程圖：**

$$\underset{t\text{ 空間}}{\boxed{\begin{matrix}\text{初始值問題}\\ \text{(I.V.P.)}\end{matrix}}} \xrightarrow[\text{變換}]{\text{拉卜拉斯}} \underset{s\text{ 空間}}{\boxed{\begin{matrix}\text{代數問題}\\ \text{(A.P.)}\end{matrix}}} \xrightarrow[\text{逆轉換}]{\text{拉卜拉斯}} \underset{t\text{ 空間}}{\boxed{\begin{matrix}\text{I.V.P.}\\ \text{的解}\end{matrix}}}$$

5. **常係數導數之 Laplace 變換：**

(1) $\pounds\left\{y'(t)\right\} = sY(s) - y(0)$

(2) $\pounds\left\{y''(t)\right\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$

(3) $\pounds\left\{y'''(t)\right\} = s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)$

6. **Laplace 變換**通常是針對**時間** t 來做變換，但跟據『**啞變元原理**』，

在特別先聲明下，亦可對**距離** x 取 **Laplace 變換**：

$$\boxed{\pounds\left\{f(x)\right\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = F(s)}$$

此時：

(1) $\pounds\left\{y'(x)\right\} = sY(s) - y(0)$

(2) $\pounds\left\{y''(x)\right\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$

(3) $\pounds\left\{y'''(x)\right\} = s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)$

7. **變係數導數之 Laplace 變換：**

(1) $\pounds\{t\dfrac{dy}{dt}\} = -\dfrac{d}{ds}\{s\mathrm{Y}(s) - y(0)\} = -\{s\dfrac{dY}{ds} + Y\}$

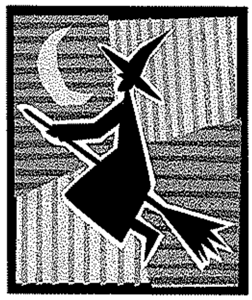
(2) $\pounds\{t\dfrac{d^2y}{dt^2}\} = -\dfrac{d}{ds}\left\{s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)\right\} = -\{s^2\dfrac{dY}{ds} + 2sY - y(0)\}$

(3) $\pounds\{t^2\dfrac{d^2y}{dt^2}\} = \dfrac{d^2}{ds^2}\left\{s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)\right\} = s^2\dfrac{d^2Y}{ds^2} + 4s\dfrac{dY}{ds} + 2Y$

範例導引，一路領先

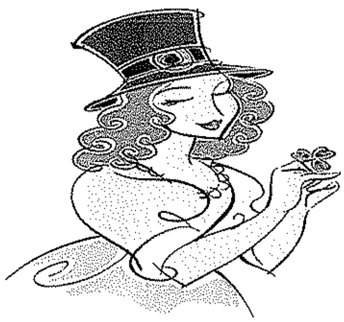
題型 1 常係數齊性 O.D.E.

範例 1



妮可平時積分就**積**得很**慢**，所以大家都叫她**妮可積慢**，而**麥克**剛好跟**妮可**相反，**麥克**平時積分就**積**得很**快**，所以大家都叫他外號**麥克積快**。有一天他們相約一起參加電影**神仙家庭**的試鏡會，那知道導演是**妮可積慢**的前夫**阿湯哥**，**阿湯哥**出了一個難題，通過才能夠一起演**神仙家庭**：

$$y''+ay'+by=0\,;\ \underline{\textbf{B.C.}}\begin{cases} y(0)=A \\ y'(0)=B \end{cases}$$



妮可積慢一緊張，居然看錯了常數 b 跟 B，得到錯誤的解 $y_{\text{妮可}}=e^{-2x}(\cos 3x+2\sin 3x)$；而**麥克積快**更緊張，看錯了常數 a 跟 A，也得到錯誤的解答 $y_{\text{麥克}}=-3e^{x}+2e^{3x}$！

如果你是**妮可積慢**的影迷，你該如何伸出援手，用 **Laplace 變換**來幫他們解圍，讓他們順利地攜手演出電影**神仙家庭**。 【改編自 90 台大電機】

【原題目】Two students solve the same initial value problem

$y''+ay'+by=0$ with given initial conditions

$y(0)=A\ and\ y'(0)=B$. Using wrong constants for b and B, one student got the solution $y_A(x)=e^{-2x}(\cos 3x+2\sin 3x)$. Using wrong constants for a and A, the other one got the solution $y_B(x)=-3e^{x}+2e^{3x}$. Find the correct constants for a,b,A and B and solve the initial value problem. 【90 台大電機】

【重點分析 1】 $y''+ay'+by=0$ B.C. $y(0)=A$, $y'(0)=B$

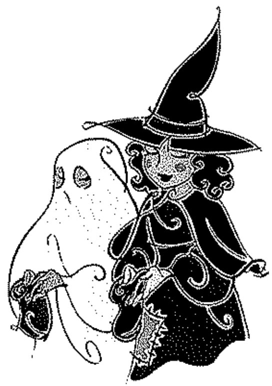
取 **Laplace transform**

得 $\left\{\ s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\ \right\}+a\left\{\ sY(s)-y(0)\ \right\}+bY(s)=0$

⇨ $\left\{\ s^2Y(s)-sA-B\ \right\}+a\left\{\ sY(s)-A\ \right\}+bY(s)=0$

⇨ $\boxed{Y(s)=\dfrac{As+(aA+B)}{s^2+as+b}}$

【重點分析 2】(1) $\pounds\{e^{ax}\}=\dfrac{1}{s-a}$



(2) $\pounds\{\cos\omega x\}=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

$\pounds\{\sin\omega x\}=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

(3) $\pounds\{e^{-ax}\cos\omega x\}=\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

$\pounds\{e^{-ax}\sin\omega x\}=\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

【詳解】(1) 蚭可積慢看錯了 b 跟 B，得到錯誤解答

$y_{\text{蚭可}}=e^{-2x}(\cos 3x+2\sin 3x)$

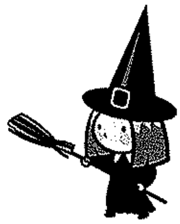
則 $Y_{\text{蚭可}}=\dfrac{(s+2)+6}{(s+2)^2+9}=\dfrac{s+8}{s^2+4s+13}=\dfrac{A_{\text{對}}s+(a_{\text{對}}A_{\text{對}}+B)}{s^2+a_{\text{對}}s+b}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_{對} = 1 \\ a_{對} = 4 \end{cases}$$

(2) **<u>麥克積快</u>**看錯了 a 跟 A，得到錯誤解答 $y_{麥克} = -3e^{x} + 2e^{3x}$

則 $Y_{麥克} = \dfrac{-3}{s-1} + \dfrac{2}{s-3} = \dfrac{-s+7}{s^2-4s+3} = \dfrac{As+(aA+B)_{對}}{s^2+as+b_{對}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (aA+B)_{對} = 7 \\ b_{對} = 3 \end{cases}$$



(3) 代回正確的答案

$$Y = \frac{A_{對}s + (aA_{對} + B_{對})}{s^2 + a_{對}s + b_{對}} = \frac{s+7}{s^2+4s+3} = \frac{s+7}{(s+1)(s+3)}$$

$$= \frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+3}$$

故 $y = £^{-1}\left\{\dfrac{s+7}{(s+1)(s+3)}\right\} = £^{-1}\left\{\dfrac{3}{s+1} - \dfrac{2}{s+3}\right\} = 3e^{-x} - 2e^{-3x}$

範例 2

Solve the following **initial value problems**:

(1) $y'' - 4y + 4y = 0$，$y(0) = 0$，$y'(0) = -3$【95 成大電機、電通、微電子】

(2) $y'' - 4y' + 4y = 0$，$y(0) = 3$，$y'(0) = 1$

【94 成大水利、93 交大土木、清大原子、92 淡江土木】

【詳解】(1) 取 **Laplace 變換** $Y(s) = \dfrac{-3}{s^2-4s+4} = \dfrac{-3}{(s-2)^2}$

$$\Rightarrow y = £^{-1}\{Y(s)\} = £^{-1}\{\frac{-3}{(s-2)^2}\} = e^{2x}£^{-1}\{\frac{-3}{s^2}\} = -3xe^{2x}$$

(2) $Y(s) = \dfrac{3s-11}{s^2-4s+4} = \dfrac{3(s-2)-5}{(s-2)^2} = \dfrac{3}{s-2} - \dfrac{5}{(s-2)^2}$