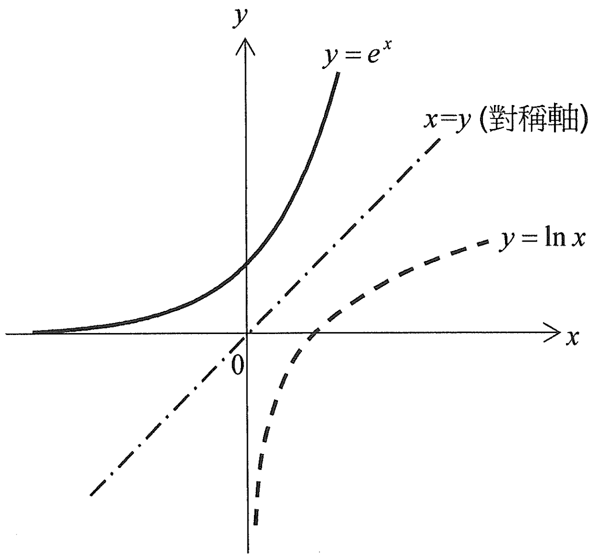
若 $a=e$（稱爲**自然對數**），則 $M(a)=M(e)=1$

$\therefore$ $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\log_e x)=\dfrac{1}{x}}$，另記：$\ln x \equiv \log_e x$，則有 $\boxed{(\ln x)'=\dfrac{1}{x}}$ $\cdots(2)$

現將指數函數 $y=e^x$ [或記爲 $y=\exp(x)$] 與對數函數 $y=\ln x$ 之圖形表示如右：



對一般人而言，π 的起源較清楚，但說到 e，同學看完前面說明，相信已有一定程度瞭解。且發現：指數函數與對數函數之圖形對稱於 $x=y$ 之直線，因爲它們正好是函數與反函數之關係（詳§2-7 節）。

說明至此，已經可以描述如下之心得：在**連續**(continuous)(即真實，real)的世界中，以 e 爲底的指數與對數最"自然"好算；但在**離散**(discrete)(即數位，digital，亦即資訊或電腦)的世界中，以 2 爲底的指數(即二進位)仍最"方便"(讀了**計算機概論**即知)。至於在中學時期以 10 爲底的指數與對數，在微積分(亦即大學以上)的世界中因少用而不多見！

下面要談的**鏈鎖律**(Chain rule)，可說是微分運算之"打手"，有了它，微分世界才能光宗耀祖！因爲可擴展到對不同函數形態之微分也！

鏈鎖律(Chain rule)

定理 設 $y=f(u),\ u=g(x)$，f、g 均爲可微分函數，則

$$\{f[g(x)]\}'=f'[g(x)]\cdot g'(x)$$ [口訣：**先外後內**]

證明：函數關係爲 $y \xrightarrow{f} u \xrightarrow{g} x$，令 $\Delta u = g(x+h)-g(x)$

$$\begin{aligned}\therefore \{f[g(x)]\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{f[g(x+h)]-f[g(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f[g(x+h)]-f[g(x)]}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(u)\cdot g'(x) = f'[g(x)]\cdot g'(x)\text{ 。}\end{aligned}$$

*　　　　　　*　　　　　　*

有了鏈鎖律後，則指數函數、對數函數、三角函數之微分即有以下之公式：

(1) $\left\{e^{f(x)}\right\}' = e^{f(x)}\cdot f'(x)$　　(2) $\{\ln[f(x)]\}' = \dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$

(3) $\{\sin[f(x)]\}' = \cos[f(x)]\cdot f'(x)$　　(4) $\{\cos[f(x)]\}' = -\sin[f(x)]\cdot f'(x)$

其餘的應用，同學已可自行寫出，請見以下諸例之說明。

說例 1 基本題	求 $\left.\dfrac{d}{dx}2^{\tan x}\right\|_{x=\frac{\pi}{4}} = ?$　　(98 台大研微)

[解] $\because$ $2^{\tan x} = e^{(\tan x)\ln 2}$，$\therefore$ $\dfrac{d}{dx}2^{\tan x} = \left[(\sec^2 x)\ln 2\right]\cdot 2^{\tan x}$

故 $\left.\dfrac{d}{dx}2^{\tan x}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = (2\ln 2)\cdot 2 = 4\ln 2$ 。

*　　　　　　*　　　　　　*

類 求 $\dfrac{d}{dx}(\cot^4 2x) = ?$　　(99 政大研)

答：$\dfrac{d}{dx}(\cot^4 2x) = (4\cot^3 2x)(-\csc^2 2x)\cdot 2 = -8\cot^3 2x\csc^2 2x$ 。

說例 2 基本題	求 $\dfrac{d}{dx}(a^x) = ?$　$\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = ?$　(99 中興轉)

[解]

(1) $\because\ a^x = e^{x\ln a}$ (換底)，$\therefore\ \dfrac{d}{dx}a^x = \dfrac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a$ (記住！)

(2) $\because\ \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$，$\therefore\ \dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{x\ln a}$。

*　　　　　*　　　　　*

$\boxed{類}$ 求 $\dfrac{d}{dx}(n^{\frac{x}{a}} - 3x) = ?$

答：$\dfrac{d}{dx}n^{\frac{x}{a}} = \dfrac{d}{dx}e^{\frac{x}{a}\ln n} = e^{\frac{x}{a}\ln n}\dfrac{\ln n}{a} = n^{\frac{x}{a}}\dfrac{\ln n}{a}$，故得 $n^{\frac{x}{a}}\dfrac{\ln n}{a} - 3$。

說例 3 說明題	已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^n = ?$ $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{bn} = ?$ 其中 a、b 均為常數。

[解]注意：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$！

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{a}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\dfrac{a}{n})^{\frac{n}{a}}\right]^a \overset{n=am}{=} \lim\limits_{m\to\infty}\left[(1+\dfrac{1}{m})^m\right]^a = e^a$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^{bn} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\dfrac{1}{n})^n\right]^b = e^b$。

此二式都是很重要之結論，以後經常會用到，當工具記住！

*　　　　　*　　　　　*

推論：$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n})^n = e^{-1},\ \lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{a}{n})^n = e^{-a},\ \lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{a}{n})^{bn} = e^{ab}}$ …(3)

說例 4 基本題	設 $f(x) = x^{33} + 3^{3x}$，求 $f'(x) = ?$

[解] $f'(x) = 33x^{32} + 3^{3x}\cdot 3\ln 3$。

*　　　　　*　　　　　*

$\boxed{類}$ 若 $f(x) = x^a + a^x$，求 $f'(x) = ?$　　答：直接計算得 $ax^{a-1} + a^x \ln a$。