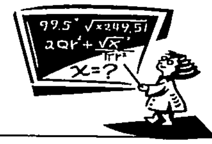

Chapter 2

微 分 學

本章摘要

一、導函數表示方法

1. $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

2. $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

二、導函數、連續和極限的關係

$$\text{極限存在}\ \underset{\text{一定}}{\overset{\text{不一定}}{\rightleftarrows}}\ \text{連續}\ \underset{\text{一定}}{\overset{\text{不一定}}{\rightleftarrows}}\ \text{可微分}$$

三、微分的基本運算性質

1. $y=f(x)=x^{a}$，則$\dfrac{dy}{dx}=f'(x)=ax^{a-1}$，其中 a 爲任意常數

2. $y=[f(x)\pm g(x)]$，則$\dfrac{dy}{dx}=f'(x)\pm g'(x)$

3. $y=f(x)\cdot g(x)$，則$\dfrac{dy}{dx}=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

4. $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，則$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^{2}(x)}$

四、三角函數的微分

1. $(\sin x)' = \cos x$　　2. $(\cos x)' = -\sin x$

3. $(\tan x)' = \sec^2 x$　　4. $(\cot x)' = -\csc^2 x$

5. $(\sec x)' = \sec x \tan x$　　6. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

五、鏈鎖律

◎若 $y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ ，常見的鏈鎖律：

(1) $[e^{f(x)}]' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$　　(2) $\{\ln[f(x)]\}' = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

(3) $\{\sin[f(x)]\}' = \cos[f(x)] \cdot f'(x)$　　(4) $\{\cos[f(x)]\}' = -\sin[f(x)] \cdot f'(x)$

六、對數的性質與微分

1. 對數的性質：

(1) $\ln 1 = 0$　　(2) $\ln e = 1$

(3) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

2. 對數函數的運算：

(1) $\ln[f(x) \cdot g(x)] = \ln[f(x)] + \ln[g(x)]$

(2) $\ln[\dfrac{f(x)}{g(x)}] = \ln[f(x)] - \ln[g(x)]$

(3) $a \ln[f(x)] = \ln[f(x)]^a$ ，其中 a 爲任意常數

3. 對數函數的微分運算性質為：$\{\ln[f(x)]\}' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

七、反函數的微分

◎若 $f(x)$ 、 $g(x)$ 互為反函數，則「 $f(g(x)) = x$ 」：

(1)微分關係式： $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$

(2)衍生： $g''(x) = -\dfrac{f''(g(x))}{[f'(g(x))]^3}$

八、隱函數微分

若函數 $F(x,y)=0$，則 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$：

其中 F_x 為 $F(x,y)$ 式中將 y 視為常數，且對 x 偏微分。
F_y 為 $F(x,y)$ 式中將 x 視為常數，且對 y 偏微分。

九、雙曲線函數與反雙曲線函數

1. 定義：$\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

2. 雙曲線函數的基本性質：

(1) $(\sinh x)'=\cosh x$　　(2) $(\cosh x)'=\sinh x$

(3) $(\tanh x)'=\sec h^2 x$　　(4) $(\coth x)'=-\csc h^2 x$

(5) $(\sec hx)'=-\sec hx\tanh x$　　(6) $(\csc hx)'=-\csc hx\coth x$

(7) $\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$

(8) $\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y$

3. 反雙曲線函數的基本性質：

(1) $\sinh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$　　$(\sinh^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) $\cosh^{-1}=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$　　$(\cosh^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(3) $\tanh^{-1}x=\dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$　　$(\tanh^{-1}x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$

(4) $\coth^{-1}x=\dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$　　$(\coth^{-1}x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$

(5) $\sec h^{-1}x=\ln(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x})$　　$(\sec h^{-1}x)'=\dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

(6) $\csc h^{-1}x=\ln(\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x})$　　$(\csc h^{-1}x)'=\dfrac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$

十、參數微分法

◎若 $x=f(t)$，$y=g(t)$ 則：

(1) $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

(2) $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{dt}{dx}\left[\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\right]$

十一、微分求近似值與相關變率

近似值$=y+dy$，其中$y=$設定量、$dy=$微小變化量。

相關變率是利用各變數之間的關係函數，再將各變數對時間t微分，依題意代入已知數值，以求得相關變率。

十二、求切線——法向量法

若函數$F(x,y)$，欲求通過函數上點(a,b)的切線，則該切線爲：

$[F_x(a,b)]x+[F_y(a,b)]y=[F_x(a,b)]a+[F_y(a,b)]b$

十三、牛頓勘根法

◎牛頓勘根法的步驟：

(1)選定適當的起始點x_1。

(2)給定x_1的情形下得到$y=f(x_1)$，做$f(x)$的切線且通過點$(x_1,f(x_1))$，則該切線爲$y=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)$。

(3)令該切線$y=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)=0$，求其與$x$軸的交點$x_2$，則$x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$。

(4)同理可得$x_3=x_2-\dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$，如此持續逼近交點，可以得到一個通式：$x_n=x_{n-1}-\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$。

十四、Rolle's定理

若$f(x)$在$[a,b]$可微分，且$f(a)=f(b)$，則至少存在一點$c\in(a,b)$，使得

$f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$。

推論：

若 $f(x)$ 可微分：

1. 若 $f(x)=0$ 有 n 個相異實根 $\Rightarrow$ $f'(x)=0$ 至少有 $n-1$ 個相異實根。（即至少有 $n-1$ 個極大和極小值）
2. 若 $f'(x)=0$ 有 n 個相異實根 $\Rightarrow$ $f(x)=0$ 至多有 $n+1$ 個相異實根。（即至多和 x 軸有 $n+1$ 個交點）
3. 若 $f'(x)$ 恆不為0（ $f'(x)>0$ 或 $f'(x)<0$ ），則為單調一對一函數，且至多有一實根。

十五、微分均值定理（Mean Value Theorem，MVT）

設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間可微分，則至少存在一點 $c\in(a,b)$，使得

$f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

十六、廣義微分均值定理（Cauchy定理 ）

設 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 可微分，且 $g'(x)\neq 0$，則必有一數 $c\in(a,b)$，使得

$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$。

十七、羅必達法則

1. $\dfrac{0}{0}$ 型：

若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

同理 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\lim\limits_{x\to a}g'(x)$ 仍然為0，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ 存在，則

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$。

如此類推，直到求出極限。

2. $\frac{\infty}{\infty}$ 型：

若 $\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \lim_{x \to a} g(x) = \infty$，且 $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，則 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

同理 $\lim_{x \to a} f'(x) = \infty, \lim_{x \to a} g'(x) = \infty$，且 $\lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ 存在，則

$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$。

如此類推，直到求出極限。

十八、圖形之描繪

◎函數圖形的描繪，通常必須先求得以下函數圖形的性質：

(1)漸近線。

(2)極大、極小值。

(3)反曲點（inflection point）。

(4)凹口。

所謂的反曲點 a，定義爲 $f''(a) = 0$，而區間 $f''(x_1) > 0$ 則爲凹口向上（convex）、區間 $f''(x_2) < 0$ 則爲凹口向下（concave）。

十九、曲率（curvature）

◎曲線上一點 $P(a,b)$ 的曲率 k 為：

(1)參數曲線：$x = x(t)$，$y = y(t) \Rightarrow k = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{\left\{(x'(t))^2 + (y'(t))^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$

(2)函數曲線：$y = f(x) \Rightarrow k = \frac{|y''|}{\left\{1 + (y')^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$