題型2.1 高階線性常係數O.D.E.齊性解

本題型所探究的高階常係數線性O.D.E.可表示成：

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots\cdots + a_1 y' + a_0 y = R(x) \tag{2-1}$$

其中 a_n 、 a_{n-1} 、 a_{n-2} …… a_1 、 a_0 均爲常數。

若 $R(x)=0$ 時，稱方程式爲齊性（homogeneous），若 $R(x)\neq 0$ 時，則稱方程式爲非齊性（nonhomogeneous）。本節主要介紹高階常係數線性O.D.E.之齊性解（homogeneous solution）求解方法，因此標準式爲如下所示：

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots\cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{2-2}$$

㈠一個n階常係數線性O.D.E.之齊性解係針對下列O.D.E.求解：

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots\cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

齊性解一般表示爲 y_h ，求解方法係令 $y=e^{mx}$ ， $-\infty<x<\infty$ 代入原O.D.E.，得

$$(a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 m + a_0)y = 0 \tag{2-3}$$

又因爲 $y=e^{mx}\neq 0$ ，所以滿足式(2-3)的條件式爲

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 m + a_0 = 0 \tag{2-4}$$

一般將(2-4)式稱爲以m爲變數之代數方程式或輔助方程式，而對於任何高階O.D.E.我們可利用分解因式法，將(2-4)式分解成一階與二階之代數方程式的組合如下所示：

$$(m-m_1)(m-m_2)\cdots\cdots(m^2+am+b)=0$$

可得m_1、m_2、m_3……m_n等n個輔助方程式的根，也就是有n個線性獨立解，進行線性組合，則可得到原O.D.E.之通解。

㈡ *1.* 若m_1、m_2、m_3……m_n均爲n個相異之實根，則原O.D.E.之通解爲

$$y_h = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots\cdots + c_n e^{m_n x}$$

2. 若m_1、m_2、m_3……m_n具有k個重複實根，也就是說 $m_1=m_2=m_3=\cdots\cdots=m_k$ ， m_{k+1} ，……， m_n ，則原O.D.E.之通解爲

$$y_h = (c_1 + c_2 x + \cdots + c_k x^{k-1})e^{m_k x} + c_{k+1} e^{m_{k+1} x} + \cdots\cdots + c_n e^{m_n x}$$

3. 若具有k個共軛複實根，也就是說 $m_1=\alpha_1\pm i\beta_1$， $m_2=\alpha_2\pm i\beta_2$，……
$m_k=\alpha_k\pm i\beta_k$ 則原O.D.E.之通解爲：

$$y_h=e^{\alpha_1 x}(c_1\cos\beta_1 x+c_2\sin\beta_1 x)+e^{\alpha_2 x}(c_3\cos\beta_2 x+c_4\sin\beta_2 x)+\cdots\cdots$$

㈢若方程式必須滿足初始條件時，則應該把初始條件代入通解，以求得通解中的常數項。

㈣以二階爲例，當二階常係數線性O.D.E.爲 $ay''+by'+c=0$

令 $y=e^{mx}$，則 $y'=me^{mx}$， $y''=m^2e^{mx}$ 代入原式O.D.E.，得

$$(am^2+bm+c)e^{mx}=0$$

因爲 $y=e^{mx}\neq 0$，所以得輔助方程式 $am^2+bm+c=0$，即可得二個根

$$m_{1,2}=\frac{1}{2a}(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})$$

現在分別針對三種可能情形進行討論，如下所示：

1. 若 m_1、m_2 均爲相異之實根 $(b^2>4ac)$，則原O.D.E.之通解爲

$$y_h=c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}$$

2. 若 m_1、m_2 爲重複實根 $(m_1=m_2=m_0)$，則原O.D.E.之通解爲

$$y_h=(c_1+c_2x)e^{m_0x}$$

3. 若 m_1、m_2 爲有共軛虛根 $(b^2<4ac)$，則 $m_{1,2}=\alpha\pm i\beta$，則原O.D.E.之通解爲

$$y_h=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$$

範題 2.1

試解下列O.D.E.

$y^{(4)}+\beta y=0$ 其中 β 為常數 （中興土木）

Ans：

原O.D.E.可改寫為：$\left(\text{其中}D=\dfrac{d}{dx}\right)$

$$(D^4+\beta)y=0$$

本題可分為 $\beta<0$ 及 $\beta>0$ 分別加以討論

當 $\beta<0$，令 $\beta=-k^4$，$k>0$