$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell} \quad ，\quad x\in(0,\ell)$$

其中 $b_n=\dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$

範題 6.16

試求 $y=x^2$ 在區間 $[0,\pi]$ 的半幅餘弦展開式　　　　（北科大電機）

Ans：

依題意進行餘弦展開式

$$y(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{1}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

將a_0及a_n代回 $y(x)$ 之表示式，得

$$y(x)=\frac{1}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx \quad ，\quad x\in[0,\pi]$$

範題 6.17

試解 $f(x)=1-x^2$ ，$-1\le x\le 1$之Fourier級數展開　　　　（交大機械）

Ans：

$f(x)$ 之週期為2，由 $T=2\ell=2$ 得 $\ell=1$

頻率 $\dfrac{n\pi}{\ell}=n\pi$ （全幅展開）

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x \quad ，(-1\le x\le 1)$$

其中 $a_0=\dfrac{1}{2\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx=\frac{2}{2}\int_0^1(1-x)^2dx=\frac{2}{3}$

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx=\frac{2}{1}\int_0^1(1-x^2)\cos n\pi dx$$

$$=\frac{-4\cdot\cos n\pi}{n^2\pi^2}$$

$b_n=0$（因為 $f(x)$ 為偶函數）

範題 6.18

已知函數

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -2<x<0\\ 1, & 0<x<2\end{cases}$$

⑴試求 $f(x)$ 之Fourier Series

⑵證明 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2K-1}=\frac{\pi}{4}$ （淡江土木）

Ans：

⑴ $f(x)$ 之週期為4，頻率為 $\frac{n\pi}{2}$ ，則 $f(x)$ 之Fourier Series為

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{2}$$（因 $f(x)$ 爲奇函數）（全幅展開）

其中 $b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 1\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\begin{cases}\frac{4}{n\pi} & n=1,3,5,\cdots\cdots\\ 0 & n=2,4,6,\cdots\cdots\end{cases}$

故 $f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi x+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\cdots\cdots\right]$

⑵ $x=1$ 代入 $f(x)$ 之Fourier Series

$$f(1)=1=\frac{4}{\pi}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots\right]$$

故 $\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots\right)=\frac{\pi}{4}$

即 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2K-1}=\frac{\pi}{4}$