

題型3-2 最適組合之求解

【重點指引】

Step 1：一階條件

$$\begin{cases} \frac{U_X}{U_Y} = \frac{P_X}{P_Y} \rightarrow Y = \phi(X) \\ P_X X + P_Y Y = M \end{cases}$$

Step 2：二階條件

$$\bar{H} > 0 \Leftrightarrow \frac{dMRS}{dX} < 0$$

I | 【精選範題】

1. Wanda Littlemore's utility function is $U(X, Y) = X + 63Y - 3Y^2$. Her income is 184. If the price of X is 1 and the price of Y is 33, how many units of good X will Wanda demand?

- (A) 17. (B) 22.
(C) 24. (D) 0.
(E) 19.

【93輔大管理】

►(E)；

$$\text{Max } U = X + 63Y - 3Y^2$$

$$\text{s.t. } X + 33Y = 184$$

$$\mathcal{L} = X + 63Y - 3Y^2 - \lambda(X + 33Y - 184)$$

F.O.C：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} &= 0 & 1 - \lambda &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} &= 0 & 63 - 6Y - 33\lambda &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= 0 & -(X + 33Y - 184) &= 0 \end{aligned} \right\} X^* = 19, Y^* = 5$$

S.O.C :

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -33 \\ -1 & -33 & 0 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

在 $\overline{H} > 0$ 表示二階條件成立下，消費者的最適選擇為 $X^* = 19$ 且 $Y^* = 5$ 。

2. 若張三之總效用函數 $U = \ln(XY)$ ， X 、 Y 代表 X 、 Y 財貨之消費量，且其預算線 $10X + 20Y = 200$ 。在效用極大的前提下，下列敘述何者正確？

- (A) 張三將消費 $X = 10$ (B) 張三之總效用將等於 $\ln(50)$
 (C) 張三之貨幣邊際效用為 2 (D) 張三對 Y 財貨之消費支出將為 100。

【94中原企管】

► (A)(B)(D)；

$$\text{Max } U = \ln X + \ln Y$$

$$\text{s.t. } 10X + 20Y = 200$$

$$\mathcal{L} = \ln X + \ln Y - \lambda(10X + 20Y - 200)$$

F.O.C :

$$\frac{1}{X} = 10\lambda$$

$$\frac{1}{Y} = 20\lambda$$

$$10X + 20Y = 200$$

聯立求解一階條件可得：

$$X^* = 10, Y^* = 5, \lambda^* = 0.01$$

(A) $X^* = 10$

(B) $U = \ln 50$

(C) $MU_m = \lambda = 0.01$

(D) $P_Y Y = 20 \times 5 = 100$

3. 王先生消費 X 、 Y 兩種財貨，其效用函數為 $U(X, Y) = XY$ ，又其所得為 12 元。財貨 Y 的單位價格為 1 元。銷售財貨 X 的廠商進行促銷。令 Q 為某消費者購買的財貨 X 數量。若 $Q \leq 3$ ，則每單位 X 價格為 2 元。若 $Q > 3$ ，則前 3 單位仍為每單位 2 元，但超過 3 單位的部分則每單位 1 元。又兩種財貨均可無限細分，

4-48 個體經濟學經典題型解析（上）

F.O.C：

$$2XY^3 = \lambda P_X \dots\dots\dots ①$$

$$3X^2Y^3 = \lambda P_Y \dots\dots\dots ②$$

$$P_X X + P_Y Y = 5P_X + 5P_Y \dots\dots\dots ③$$

利用上式聯立求解，可得：

$$X = \frac{2P_X + 2P_Y}{P_X}, Y = \frac{3P_X + 3P_Y}{P_Y}$$

$$\therefore \text{在 } P_X = 1, P_Y = 1 \text{ 下, } X^* = 4, Y^* = 6, U^* = 4^2 \times 6^3 = 3,456$$

$$\text{在 } P_X = 2, P_Y = 1 \text{ 下, } X^{**} = 3, Y^{**} = 9, U^{**} = 3^2 \times 9^3 = 6,561$$

II | 【模擬演練】

1. 假設某消費者將其全部所得用於兩種財貨 x 、 y ，此兩財貨的消費量分別為 q_x 、 q_y ，而消費者的效用函數為 $U = q_x^2 q_y$ 。如果 x 財貨之價格為1， y 財貨之價格為2，而此消費者的所得為15，此時消費者的貨幣所得邊際效用為多少？

(A)50

(B)100

(C)150

(D)200。

【94高雄第一科大企管】

2. 捷運公司提出優惠方案：搭乘捷運每公里15元，當月搭乘里程數超過150公里，則可免費搭乘30公里。設某甲的所得有6300元，效用函數為 $U(X, Y) = XY^2$ ，其中 X 為搭乘捷運的距離（公里）， Y 為其他財貨，設 $P_Y = 10$ 。均衡時他每月搭乘多少公里？

(A)140公里

(B)210公里

(C)150公里

(D)180公里。

【94輔大金融】

3. Assume that a consumer has an income of \$30,000 that he spends on air travel, Y , and all other goods X . Assume $P_X = 1$. Suppose that the price for each mile of the first 10,000 miles of air travel is \$2 per mile. A frequent traveler program gives a 50% discount to travelers for every mile above 10,000 miles. Can you draw the budget constraint and find the equations that define each part of it? Suppose that the consumer's utility function is $U = XY$. Can you calculate and show on the

diagram the optimal choice of the consumer? Show how it is possible that a consumer with different but still convex indifferent curves could be indifferent between two different optimal choices. 【93台大商研】

4. 下列敘述何者為正確？

- (A) 若消費者的效用函數為 $U = \log X + 4 \log Y$ ，預算線為 $600 = 4X + 8Y$ ，則 X 財貨與 Y 財貨的交叉彈性為 -1
- (B) 假設小王對財貨 X 與 Y 的效用函數為 $U(X, Y) = \ln(X) + 3Y$ ，財貨 X 與 Y 的價格分別為 3 元與 9 元，所得為 120 元，則小王對 X 財貨的均衡需求量為 $1/3$
- (C) 若效用函數為 $U = X^2Y$ ，則當 $P_X = 3$ 元， $P_Y = 6$ 元，最大效用下 X 與 Y 的消費比率為 1
- (D) 生產函數 $Q = (20KL)/(K + L)$ 的替代彈性為 $1/2$
- (E) 以上皆非。 【94台北大經濟】

【解析】

1. (A)；

$$\text{Max } U = x^2y$$

$$\text{s.t. } x + 2y = 15$$

$$\mathcal{L} = x^2y - \lambda(x + 2y - 15)$$

F.O.C：

$$2xy = \lambda$$

$$x^2 = 2\lambda$$

$$x + 2y = 15$$

聯立求解一階條件，可得：

$$x^* = 10, y^* = 2.5, \lambda^* = 50$$

由於 λ 即為貨幣所得邊際效用，故 $MU_m = \lambda = 50$

2. (A)；

$$\text{Max } U = XY^2$$

$$\text{s.t. } P_X X + P_Y Y = M$$

4-50 個體經濟學經典題型解析（上）

$$X^* = \frac{1}{3} \frac{M}{P_X}$$

今在捷運公司的優惠方案下，消費者面對如下預算線：

$$(一) \text{ 當 } X \leq 150 \text{ 時, } 15X + 10Y = 6300 \rightarrow X^* = \frac{1}{3} \cdot \frac{6300}{15} = 140 \text{ (合)}$$

$$(二) \text{ 當 } X > 150 \text{ 時, } 15(X - 30) + 10Y = 6300$$

$$15X + 10Y = 6750 \rightarrow X^* = \frac{1}{3} \cdot \frac{6750}{15} = 150 \text{ (不合)}$$

3.(一)預算限制式：

$$X + 2Y = 30000 ;$$

$$\text{當 } Y \leq 10000$$

$$X + 2 \times 10000 + (Y - 10000) = 30000 ;$$

$$\text{當 } Y > 10000$$

整理如下：

$$X + 2Y = 30000 ; \quad \text{當 } Y \leq 10000$$

$$X + Y = 20000 ; \quad \text{當 } Y > 10000$$

$$(二) \text{Max } U = XY$$

$$\text{s.t. } P_X X + P_Y Y = M$$

$$\mathcal{L} = XY + \lambda(P_X X + P_Y Y - M)$$

F.O.C：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = 0 \quad Y = \lambda P_X$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = 0 \quad X = \lambda P_Y$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad P_X X + P_Y Y = M$$

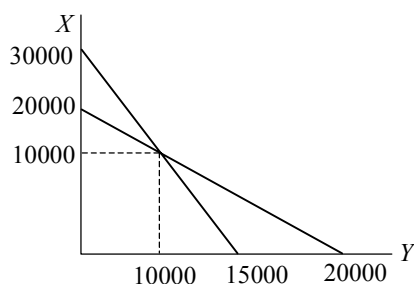
聯立求解，可得：

$$X = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{P_X}$$

$$Y = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{P_Y}$$

$$1. \text{ 在預算限制式爲： } X + 2Y = 30000 \quad Y \leq 10000$$

$$X = 15000$$



（注意：本題以Y爲橫軸）