📖題型4. 用快速特徵方程式法（Quick Characteristic Equation）解非齊次（Nonhomogeneous）遞迴函數

• 例題1 •

Solve the recurrence relation $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} + 3^n$.

（94海洋電機，90、89海洋資料，90中央資管）

☞○解非齊次遞迴函數的眾多方法中，以本方法最簡單、快速，所以讀者務必熟悉此方法。（但本方法無法解題型3的題目）

本方法是將複雜的非齊次遞迴函數轉成齊次遞迴函數。方法如下：將所有的遞迴函數視為：

$a_0 \cdot t_n + a_1 \cdot t_{n-1} + \cdots + a_k \cdot t_{n-k} = b_1^n \cdot p_1(n) + b_2^n \cdot p_2(n) + \cdots$，其中$b_i$是相異的常數而且$p_i(n)$是degree為$d_i$的多項式

$\Rightarrow$特徵方程式為$(a_0 \cdot x^k + a_1 \cdot x^{k-1} + \cdots + a_k) \cdot (x - b_i)^{d_i+1} = 0$

$\Rightarrow$答案t_n即是相對應於上列特徵方程式的解。

【解】

首先將題目$a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} + 3^n$改寫成標準式：

$a_n - 6a_{n-1} + 8a_{n-2} = 3^n = 3^n \cdot 1.$

By the Quick-Characteristic equation; $b_1 = 3$, $p_1(n) = 1$, $d_1 = 0$

$\Rightarrow (x^2 - 6x + 8) \cdot (x - 3) = 0$

$\Rightarrow (x - 2) \cdot (x - 4) \cdot (x - 3) = 0$

$\Rightarrow a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n + C \cdot 4^n.$

• 例題2 •

Solve the following recurrence relations :

(a)$x_n - 3x_{n-1} = n$, for $n \geq 1$ and $x_0 = 1$. （94朝陽資工，91淡江資工）

(b)$a_n = a_{n-1} + n$, if $a_1 = 1$.

（95元智資工，94台科資管、北科資工，93義守資工）

(c)$a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} + 3^n$, $a_1 = 1$,$a_2 = 2$. （94海洋電機、銘傳資工）

(d)$a_{n+1} - 2a_n = 2^n$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$. （94朝陽資工，93中山資工）

【解】

(a)**因為等號右邊的函數是**$f(n) = n$**，它是一個一次方多項式，**

$\Rightarrow$**我們將右邊的函數看成**$f(n) = n = 1^n \cdot n$,

$\Rightarrow$**特徵方程式是**$(x - 3) \cdot (x - 1)^2 = 0$,

$\Rightarrow$**因式分解得到**$x = 3, 1, 1$

$\Rightarrow x_n = (A + B \cdot n) \cdot 1^n + C \cdot 3^n$

代入邊際條件$x_1 = 3 \cdot x_0 + 1 = 4$, $x_2 = 3 \cdot x_1 + 2 = 14$,

$$\begin{cases} x_0 = 1 = A + C \\ x_1 = 4 = A + B + 3C \\ x_2 = 14 = A + 2B + 9C \end{cases}$$

$\Rightarrow A = -3/4$, $B = -1/2$, $C = 7/4$

$\Rightarrow x_n = (-3/4) + (-1/2) \cdot n + (7/4) \cdot 3^n$.

(b)**因為等號右邊的函數是**$f(n) = n$**，它是一個一次方多項式，**

$\Rightarrow$**我們將右邊的函數看成**$f(n) = n = 1^n \cdot n$,

$\Rightarrow$**特徵方程式是**$(x - 1) \cdot (x - 1)^2 = 0$,

$\Rightarrow$**因式分解得到**$x = 1, 1, 1$

$\Rightarrow a_n = (A + B \cdot n + C \cdot n^2) \cdot 1^n$

代入邊際條件$a_2 = a_1 + 1 = 2$, $a_3 = a_2 + 3 = 5$,

$$\begin{cases} a_1 = 1 = A + B + C \\ a_2 = 2 = A + 2B + 4C \\ a_3 = 5 = A + 3B + 9C \end{cases}$$

$\Rightarrow A = 0$, $B = 1/2$, $C = 1/2$,

$\Rightarrow a_n = (1/2) \cdot (n + n^2)$.

(c)**因為等號右邊的函數是**$f(n) = 3^n$**，它是一個常數的**n**次方，**

$\Rightarrow$**我們將右邊的函數看成**$f(n) = n = 3^n \cdot 1$,

$\Rightarrow$**特徵方程式是**$(x^2 - 6 + 8) \cdot (x - 3) = 0$,

$\Rightarrow$**因式分解得到**$x = 2, 3, 4$

$\Rightarrow a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n + C \cdot 4^n$

代入邊際條件$a_3 = 6a_2 - 8a_1 + 3^3 = 30$,

$$\begin{cases} a_1 = 1 = 2A + 3B + 4C \\ a_2 = 2 = 4A + 9B + 16C \\ a_3 = 30 = 8A + 37C + 64C \end{cases}$$

$\Rightarrow A = 29/4,\ B = -9,\ C = 27/8$,

$\Rightarrow a_n = \dfrac{29}{4} \cdot 2^n + (-9) \cdot 3^n + \dfrac{27}{8} \cdot 4^n$.

(d)**因為等號右邊的函數是**$f(n) = 2^n$**，它是一個常數的**n**次方，**

$\Rightarrow$**我們將右邊的函數看成**$f(n) = n = 2^n \cdot 1$,

$\Rightarrow$**特徵方程式是**$(x - 2) \cdot (x - 2) = 0$,

$\Rightarrow$**因式分解得到**$x = 2, 2$

$\Rightarrow a_n = (A + B \cdot n) \cdot 2^n$

代入邊際條件$a_1 = 2^0 + 2a_0 = 3$,

$$\begin{cases} a_0 = 1 = A \\ a_1 = 3 = 2A + 2B \end{cases}$$

$\Rightarrow A = 1,\ B = 1/2$,

$\Rightarrow a_n = [1 + (1/2) \cdot n] \cdot 2^n$.

• 例題3 •

Solve the recurrence relation $\begin{cases} t_n = 2t_{n-1} + n + 2^n, n \ge 1 \\ t_0 = 0 \end{cases}$

○**本題遞迴方程式的右邊是一個混合體；它是由多項式**$f_1(n) = n$**與常數的次方**$f_2(n) = 2^n$**相加而成**，**讀者只要利用例題**1**的分析，將**$f_1(n)$**與**$f_2(n)$**分別處理即可**.

【解】

The recurrence can be written as $t_n - 2 \cdot t_{n-1} = n + 2^n$,

$\Rightarrow$**我們將右邊的函數看成**$f(n) = n = 1^n \cdot n + 2^n \cdot 1$,

$\Rightarrow$**將題目代入標準式，得到**$b_1 = 1,\ p_1(n) = n,\ b_2 = 2,\ p_2(n) = 1$.