【要訣】(1) 本例中的A是一個典型的idempotent. (詳情見CH10定義10)

(2) 本例中的B是一個典型的nilpotent. (詳情見CH14定義1)

(3) idempotent與nilpotent在舉反例時相當有用.

【解】由矩陣乘法計算即得知$A=A^2=A^3=\ldots\ldots$;

$$B^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad O=B^3=B^4=B^5=\ldots\ldots$$

習題4c.1

計算 $\begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^4$ ，其中 $*$ 表示不介意其確實值的一些數.

Ans: $O_{4\times 4}$

5 範例:《不成立的性質》

判斷下列各性質是否成立? 若成立則加以證明, 若不成立則舉反例.

① $AB=BA$,

② $(AB)^2=A^2B^2$,

③ $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$, (交大79工工[7])

④ $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$,

⑤ 若$AB=O$, 則$A=O$或$B=O$,

⑥ 若$A^2=O$, 則$A=O$,

⑦ 若$AB=AC$, 且$A\neq O$, 則$B=C$,

⑧ 若$A^2=A$, 則 $A=O$或$A=I$.

【要訣】設$p(A, B)$是含有A, B的一個敘述. 有關此敘述的真僞, 有下列三種情形:

(ⅰ) 對任意A, B; $p(A,B)$都成立

(ⅱ) 存在A,B使 $p(A,B)$不成立 // (ⅱ)是(ⅰ)的否定敘述.

(ⅲ) 對任意A,B; $p(A,B)$都不成立

但習慣上都是把(ⅰ)的“對任意A,B”省略掉, 簡稱爲“$p(A,B)$成立”將(ⅱ)簡稱爲“$p(A,B)$不成立”. 至於(ⅲ), 可說成“$\neg p(A,B)$成立”. 因此我們所看到的教科書都直接說矩陣乘法的交換律“不成立”, 而不說“不恆成立”.

【解】以上全都不成立.

①～④可舉$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$爲例, 請讀者自行驗證.

⑤～⑦可舉$A=B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$爲例, 請讀者自行驗證.

⑧可舉$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$爲例, 請讀者自行驗證.

◎ **5a** 定理:《係數積與矩陣乘法》

① $a\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$

② 對$a\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$, $a\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}a$. //這不是交換律!!

③ 對$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^{n\times1}, \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{1\times n}$, 有 $(\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{z})= (\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{z})\,\boldsymbol{x}$. //這不是交換律!!

④ 對$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n\times1}, \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{1\times n}$, 有 $(\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y})^2= (\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y})$. //這不是交換律!!

【要訣】(1) 對$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{1\times n}, \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{n\times1}$,

$\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}$是1×1矩陣, 也當做是數. 而 $\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{x}$ 是n×n矩陣, 兩者大不相同.

(2) ①中最左邊是係數積, 最右邊是矩陣乘法. 因習慣上不區分1×1矩陣與數. 所以可將①寫成如②. ③中第一個等號是矩陣乘法的結合律(定理9①).第二個等號是利用②. ④式右邊通常寫成$(\boldsymbol{yx})\boldsymbol{xy}$.

(3) 本定理一般書都未特別列出, 但在矩陣計算上很常用.
讀者務必要由上下文明確分辨哪裏是矩陣乘法, 哪裏是係數積.

【證】①②由矩陣乘法及係數積的定義驗證即得.

③ 讀者自證.

④ $(\boldsymbol{xy})^2=(\boldsymbol{xy})(\boldsymbol{xy})=((\boldsymbol{xy})\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{yx}))\boldsymbol{y}$ (定理9①)

$=((\boldsymbol{yx})\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}$ (由②)

$=(\boldsymbol{yx})(\boldsymbol{xy})$ (定理9④)

習題5a.1:

(1) 對n=2寫出本定理各條的矩陣型式. (2) 證明本定理③.

◎ ❻ 定理:《右直切, 左直切》

設任意矩陣X的第k個行向量記爲$X^{(k)}$,

① 對矩陣$A\in\mathbb{R}^{m\times n}, B\in\mathbb{R}^{n\times s}, C\in\mathbb{R}^{m\times s}$,

$AB=C \iff \forall k,\ AB^{(k)}=C^{(k)}$ 《右直切分解法》

② 對$x_1, x_2, ..., x_n\in\mathbb{R}, A\in\mathbb{R}^{m\times n}$,

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1A^{(1)}+x_2A^{(2)}+\ \dots\ +x_nA^{(n)}$$ 《左直切展開法》

【要訣】(1) [(AB)的第j行]=$A\cdot$[B的第j行]

(2) $$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot [A\text{的第}k\text{行}]$$

【證】由矩陣乘法的定義仔細檢驗即得.

【實例】① $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g & j \\ h & k \\ i & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & r \\ q & s \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \end{cases}$$

② $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} b \\ e \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

習題6.1: (參閱CH3範例12a)