＊12a 定理:《交叉降階公式》

補充資料請參閱光碟

§2. 行列式的特殊技巧

†13 範例:《不定階三線行列式》

若n階方陣 $A_n=[\,a_{ij}\,]$, 其中

$$a_{ij}=\begin{cases} p & ; \quad i=j+1, \\ q & ; \quad i=j, \\ r & ; \quad i=j-1, \\ 0 & ; \quad \text{其它} \end{cases}$$

證明

①$\det A_1=q$, $\det A_2=q^2-pr$. $\det A_3=q^3-2pqr$.

②對$n\geq3$: $\det(A_n)=q\det(A_{n-1})-pr\det(A_{n-2})$

【要訣】(1) 非零值集中在主對角線附近的矩陣稱為帶狀矩陣(*band matrix*)
在主對角線, 上對角線, 下對角線才有非零項的矩陣稱為三線矩陣(*tridiagonal matrix*)

(2) 三線矩陣的不定階行列式通常是用離散數學的"遞迴關係"求解.
若要用純線代的方法請參閱CH16範例13.

【解】

$$\det A_1=\det[\,q\,]=q\ , \quad \det A_2=\det\begin{bmatrix} q & r \\ p & q \end{bmatrix}=q^2-pr\ .$$

對$n\geq3$: $\det(A_n)=$

$$\det\begin{bmatrix} q & r & & & \\ p & q & r & & \\ & p & q & r & \\ & & p & q & \\ & & \cdots\cdots & & \\ & & & & \end{bmatrix}_{n階}$$

(對第一列降階展開)

$$= q \cdot \det(A_{n-1}) - r \cdot \det\begin{bmatrix} p & r & & & \\ 0 & q & r & & \\ & p & q & r & \\ & & p & q & \\ & & \cdots\cdots & & \\ & & & & \end{bmatrix}_{n-1階}$$

(對第一行降階展開)

$= q \det(A_{n-1}) - pr \det(A_{n-2})$

習題13.1 (清大86資科[7]10%)

Find $\det(A_n)$ if $A_n = [\, a_{ij} \,]$, where

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } \ i=j \ \text{ or } \ i=j+1, \\ -1 & \text{if } \ i=j-1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Ans: $\det(A_n) = \det(A_{n-1}) + \det(A_{n-2})$, $\det(A_1) = 1$, $\det(A_2) = 2$.

依離散數學的方法解此recursive relation可得

$$\det(A_n) = (1/\sqrt{5})\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$