

③ 對純量 k , 定義 $T_k: V \longrightarrow V$ 如 $T_k(\mathbf{v}) = k\mathbf{v}$. 證明 T_k 是線性映射.

2 定理:《線性條件的變型及推論》

設 V, W 為佈於純量體 K 的向量空間.

① 對函數 $T: V \longrightarrow W$, 下列各敘述等價:

$$(i) \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall h, k \in K, T(h\mathbf{u} + k\mathbf{v}) = hT(\mathbf{u}) + kT(\mathbf{v}).$$

$$(ii) \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall h \in K, T(h\mathbf{u} + \mathbf{v}) = hT(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}).$$

$$(iii) (a) \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}), \quad \text{《加法群同態》}$$

$$(b) \forall h \in K, \forall \mathbf{u} \in V, T(h\mathbf{u}) = hT(\mathbf{u}).$$

$$(iv) \forall p \in \mathbb{Z}^+; \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p \in V; \forall h_1, h_2, \dots, h_p \in K;$$

$$T(h_1\mathbf{u}_1 + \dots + h_p\mathbf{u}_p) = h_1T(\mathbf{u}_1) + \dots + h_pT(\mathbf{u}_p).$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{上式常寫爲 } T(\sum_{i=1}^p h_i \mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^p h_i T(\mathbf{u}_i) \end{array} \right)$$

② 若①(iii)(a)成立, 則

$$(a) T(\mathbf{o}) = \mathbf{o}.$$

$$(b) \forall \mathbf{v} \in V, T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v}).$$

$$(c) \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}).$$

【要訣】(1)要證明 T 是線性映射時, 通常使用①(i)或①(iii). 在型式簡單時, 可用①(i)一次完成. 若較複雜, 可用①(iii)分兩部分加以證明.

(2)若 $T: V \longrightarrow W$ 不滿足 $T(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$, 則 T 不是線性映射.

【證】(先證明②)

$$\textcircled{2} (a) T(\mathbf{o}) = T(\mathbf{o} + \mathbf{o}) = T(\mathbf{o}) + T(\mathbf{o})$$

等號兩邊加上 $-T(\mathbf{o})$ 即得 $\mathbf{o} = T(\mathbf{o})$.

$$(b) T(\mathbf{v}) + T(-\mathbf{v}) = T(\mathbf{v} + (-\mathbf{v})) = T(\mathbf{o}) = \mathbf{o} \quad (\text{套用}\textcircled{2}(a))$$

等號兩邊加上 $-T(\mathbf{v})$ 即得 .

$$(c) T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u} + (-\mathbf{v})) = T(\mathbf{u}) + T(-\mathbf{v}) = T\mathbf{u} - T\mathbf{v}. \quad (\text{套用}\textcircled{2}(b))$$

$$\textcircled{1} [(i) \implies (ii)] (i) \text{中令 } k=1 \text{ 即得 } (ii).$$

$$[(ii) \implies (iii)] (ii) \text{中令 } h=1 \text{ 即得 } (iii)(a).$$

在(ii)中令 $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ 由②(a)即得(iii)(b).

[(iii) $\Rightarrow$ (iv)] 由 iii(b) 得知 $\forall i, T(h_i \mathbf{u}_i) = h_i T\mathbf{u}_i$.

再由 iii(a) 可逐步得出 $T(\sum_i h_i \mathbf{u}_i) = \sum_i T(h_i \mathbf{u}_i)$.

[(iv) $\Rightarrow$ (i)] 在 (iv) 中令 $p=2$ 即得 (i).

習題2.1

對線性映射 T , 證明 $T(h\mathbf{u}-k\mathbf{v})=hT(\mathbf{u})-kT(\mathbf{v})$.

3 定理:《由基底造線性映射》

① 設 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 是向量空間 V 的一個基底, 而 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ 為向量空間 W 內的 n 個向量, 則存在唯一的 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 滿足 $T(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j; j=1, 2, \dots, n$.

② 接①, 若 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ 線性獨立, 則 T 為一對一.

③ 接①, 若 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ 生成 W , 則 T 為映成.

④ 接①, 若 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ 是 W 的基底, 則 T 為一對一且映成的線性映射.

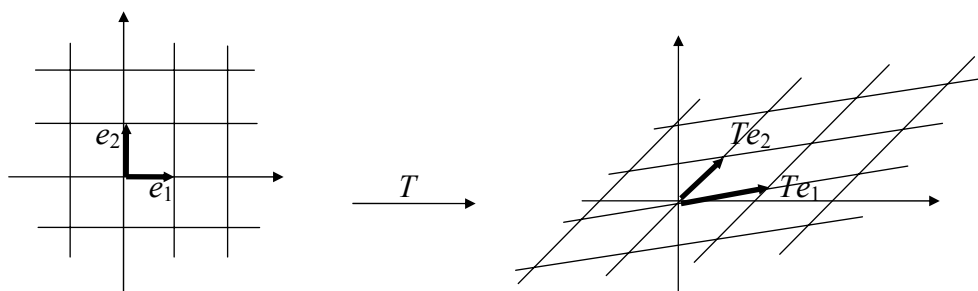
⑤ 設 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ 是向量空間 V 的一個生成集, $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$.

若 $T_1(\mathbf{v}_j) = T_2(\mathbf{v}_j); j=1, 2, \dots, r$. 則 $T_1 = T_2$.

⑥ 設 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ 是有限維向量空間 V 內的獨立集, 而 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r$ 為向量空間 W 內的 r 個向量, 則存在 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 滿足 $T(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j; j=1, 2, \dots, r$.

【要訣】(1) 定好線性映射在一組基底的像後, 這個線性映射就被唯一確定.

幾何意義如下圖:



(2) 兩個線性映射若在某個基底(或生成集)上取值相等, 則這兩個線性映射相等.

【證】①[存在性]

依下法定義函數 $T: V \longrightarrow W$:

對各個 $\mathbf{v} \in V$, 因 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ 為基底,

可取得唯一的 $h_1, h_2, \dots, h_n$ 使 $\mathbf{v} = h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \dots + h_n\mathbf{v}_n$.

然後就令 $T(\mathbf{v}) = h_1\mathbf{w}_1 + h_2\mathbf{w}_2 + \dots + h_n\mathbf{w}_n$

這樣所產生的函數 T 會滿足 $T\mathbf{v}_j = \mathbf{w}_j$, $j=1, 2, \dots, n$ 的要求.

$\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V, \forall a_1, a_2 \in K$,

取 $h_1, h_2, \dots, h_n, k_1, k_2, \dots, k_n \in K$, 使 $\mathbf{u}_1 = \sum h_j \mathbf{v}_j, \mathbf{u}_2 = \sum k_j \mathbf{v}_j$, 則

$$\begin{aligned} T(a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2) &= T(a_1\sum h_j \mathbf{v}_j + a_2\sum k_j \mathbf{v}_j) = T(\sum (a_1h_j + a_2k_j)\mathbf{v}_j) \\ &= \sum (a_1h_j + a_2k_j)\mathbf{w}_j && (\text{依 } T \text{ 的定義法}) \\ &= a_1\sum h_j \mathbf{w}_j + a_2\sum k_j \mathbf{w}_j \\ &= a_1T(\sum h_j \mathbf{v}_j) + a_2T(\sum k_j \mathbf{v}_j) && (\text{依 } T \text{ 的定義法}) \\ &= a_1T(\mathbf{u}_1) + a_2T(\mathbf{u}_2) \end{aligned}$$

$\therefore T$ 是線性映射.

[唯一性]

若 S 為線性映射, 滿足 $S(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j, j=1, 2, \dots, n$.

對任意 $\mathbf{v} \in V$, 取 $h_1, h_2, \dots, h_n$ 使 $\mathbf{v} = h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \dots + h_n\mathbf{v}_n$,

則 $S(\mathbf{v}) = S(h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \dots + h_n\mathbf{v}_n)$

$$= h_1S\mathbf{v}_1 + h_2S\mathbf{v}_2 + \dots + h_nS\mathbf{v}_n \quad (S \text{ 的線性條件})$$

$$= h_1\mathbf{w}_1 + h_2\mathbf{w}_2 + \dots + h_n\mathbf{w}_n \quad (S \text{ 的已知條件})$$

$$= T(h_1\mathbf{v}_1 + h_2\mathbf{v}_2 + \dots + h_n\mathbf{v}_n) = T(\mathbf{v}). \quad (\text{①中 } T \text{ 的定義法})$$

$\therefore S = T$.

† ②③ ④ 補充資料請參閱光碟

④ 由②③即得.

⑤ 讀者仿①自證.

⑥ 將 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ 擴大成 V 的基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, (CH6定理21)

並將 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r$ 擴大成 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ 由①即得證.

④ 補充資料請參閱光碟