[$\Longleftarrow$] 若 $\boldsymbol{x}=(x_1, . . . , x_n)^T \in \mathbb{C}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}$，則

$$\boldsymbol{x}^H D\boldsymbol{x} = d_1 \bar{x}_1 x_1 + d_2 \bar{x}_2 x_2 + ... + d_n \bar{x}_n x_n$$
$$= d_1 \| x_1 \|^2 + d_2 \| x_2 \|^2 + ... + d_n \| x_n \|^2$$

∵至少有一個x_i不為0, ∴ $\boldsymbol{x}^H D\boldsymbol{x} > 0$.

③ $D^H = D$

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{diag}(\bar{d}_1, \bar{d}_2, ..., \bar{d}_n) = \mathrm{diag}(d_1, d_2, ..., d_n)$

$\Longleftrightarrow$ $\forall i, \bar{d}_i = d_i$ $\Longleftrightarrow$ $\forall i, d_i \in \mathbb{R}$

⑤ $D^H D = I$

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{diag}(\bar{d}_1, \bar{d}_2, ..., \bar{d}_n)\, \mathrm{diag}(d_1, d_2, ..., d_n) = \mathrm{diag}(1, 1, ..., 1)$

$\Longleftrightarrow$ $\forall i, \bar{d}_i d_i = 1$ $\Longleftrightarrow$ $\forall i, | d_i | = 1$

其餘讀者自證.

習題17b.1

設$d_1, ..., d_n \in \mathbb{R}$, $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, ..., d_n)$，則

④ D為斜對稱矩陣 $\Longleftrightarrow$ $\forall i, d_i = 0$ $\Longleftrightarrow$ $D = O$

⑤ D為正交矩陣 $\Longleftrightarrow$ $\forall i, d_i = \pm 1$

◎**17c定理**:《正則矩陣家族(實數對稱矩陣家族)的特徵性質》

(a) 設複數矩陣A可單式對角化(A為正則矩陣)，則

① A為正定 $\Longleftrightarrow$ 每個A的特徵值都是正實數

①' A為負定 $\Longleftrightarrow$ 每個A的特徵值都是負實數

② A為正半定 $\Longleftrightarrow$ 每個A的特徵值都是“正實數或0 ”

②' A為負半定 $\Longleftrightarrow$ 每個A的特徵值都是“負實數或0 ”

③ A為厄米特矩陣 $\Longleftrightarrow$ 每個A的特徵值都是實數

④ A為斜厄米特矩陣 $\Longleftrightarrow$ 每個A的特徵值都是純虛數

⑤ A為單式矩陣 $\Longleftrightarrow$ 每個A的特徵值的絕對值都是1

(b) 設實數矩陣A可正交對角化(A為實數對稱矩陣)，則

① A為正定 $\Longleftrightarrow$ 每個A的特徵值都是正實數

①' A爲負定 $\Longleftrightarrow$ 每個A的特徵值都是負實數

② A爲正半定 $\Longleftrightarrow$ 每個A的特徵值都是“正實數或0 ”

②' A爲負半定 $\Longleftrightarrow$ 每個A的特徵值都是“負實數或0 ”

(c) ① A爲正定 $\Longleftrightarrow$ A爲正半定且可逆.

①' A爲負定 $\Longleftrightarrow$ A爲負半定且可逆.

【要訣】(1) 以上(a)中各式要由右向左推時, 必須用到“A爲正則矩陣”的前提.
以上(b)中各式要由右向左推時, 必須用到“A爲對稱矩陣”的前提.
(見習題17c.1)

【證】(a) ①①'②②'③④⑤

取單式矩陣 U, 使 $U^{-1}AU=U^{H}AU=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n)$.

$\therefore\ A = U\,\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n)\,U^{-1}= U\,\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n)U^{H}$

由定理17a,

A具有“某性質” $\Longleftrightarrow$ $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n)$ 具有“某性質”

再由定理17b即得證.

(c) ①①'

A可逆 $\Longleftrightarrow$ 每個A的特徵值都不爲0 (CH12定理7)

再由(a)(b)①①'②②'即得證.

其餘讀者自證.

習題17c.1:

試舉例說明可能: A可對角化且特徵值都是實數, 但卻不是厄米特矩陣.

$$\text{Ans: } \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

習題17c.2: (交大83資料[3])

Show that if matrix A is real and normal and has real eigenvalues, then A is symmetric.

17d 定理:《平方矩陣》

(a) 設A爲$n\times n$複數矩陣. (原①①'改編入定理17c.)

② A爲正定 $\Longrightarrow$ A^2爲正定. ②' A爲負定 $\Longrightarrow$ A^2爲正定.

③ A爲正半定 $\Longrightarrow$ A^2爲正半定. ③' A爲負半定 $\Longrightarrow$ A^2爲正半定.

④ A爲厄米特 $\Longrightarrow$ A^2爲正半定.

④' A爲斜厄米特 $\Longrightarrow$ A^2爲(厄米特且)負半定.

⑤ A爲可逆厄米特 $\Longrightarrow$ A^2爲正定.

⑤' A爲可逆斜厄米特 $\Longrightarrow$ A^2爲(厄米特且)負定.

⑥ A爲單式矩陣 $\Longrightarrow$ A^2爲單式矩陣.

⑦ A爲正則矩陣 $\Longrightarrow$ A^2爲正則矩陣.

(b) 設A爲$n\times n$實數矩陣. (原①①'改編入定理17c.)

② A爲正定 $\Longrightarrow$ A^2爲正定.

②' A爲負定 $\Longrightarrow$ A^2爲正定.

③ A爲正半定 $\Longrightarrow$ A^2爲正半定.

③' A爲負半定 $\Longrightarrow$ A^2爲正半定.

④ A爲對稱 $\Longrightarrow$ A^2(爲對稱且)爲正半定.

④' A爲斜對稱 $\Longrightarrow$ A^2(爲對稱且)負半定.

⑤ A爲可逆對稱 $\Longrightarrow$ A^2爲正定.

⑤' A爲可逆斜對稱 $\Longrightarrow$ A^2(爲對稱且)負定.

⑥ A爲正交矩陣 $\Longrightarrow$ A^2爲正交矩陣.

【證】(a) 由定理17c檢討A^2的特徵值即得證.

(b) ②②'③③'爲(a)的特例，當然仍成立.

由定義得知:

A爲實數對稱矩陣 $\Longleftrightarrow$ A爲實數厄米特矩陣

A爲實數斜對稱矩陣 $\Longleftrightarrow$ A爲實數斜厄米特矩陣

A爲實數正交矩陣 $\Longleftrightarrow$ A爲實數單式矩陣

套用(a)即可得證.

[(b)⑤'另證]

$(A^2)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})(A^{\mathrm{T}})=(-A)(-A)=A^2$. $\therefore$ A^2對稱.

$\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n\times 1}\backslash\{\boldsymbol{o}\}$, 由$A$可逆得知$A\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}$. (CH8定理17)

$$\boldsymbol{x}^{T}A^{2}\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}^{T}A^{T}A\boldsymbol{x}=-(A\boldsymbol{x})^{T}(A\boldsymbol{x})<0$$

(④,④',⑤皆可依此法證明)

[(b)⑥'另證]

$(A^2)^T(A^2)=(A^TA^T)(AA)=A^T(A^TA)A=A^T(A^TA)A=A^TA=I.$

習題17d.1:

若A爲正定矩陣, 利用定理17c證明:

①A^k, k=1,2,3,... 皆爲正定矩陣. ②A可逆且A^{-1}仍爲正定矩陣.

17e 定理:《平方根矩陣》

(a) 設A爲$n\times n$複數矩陣.

① A爲正定矩陣 $\Longrightarrow$ ∃正定矩陣B使$B^2=A$且$AB=BA$.

② A爲正半定矩陣 $\Longrightarrow$ ∃正半定矩陣B使$B^2=A$且$AB=BA$.

③ A爲負定矩陣 $\Longrightarrow$ ∃可逆斜厄米特矩陣B使$B^2=A$且$AB=BA$.

④ A爲負半定矩陣 $\Longrightarrow$ ∃斜厄米特矩陣B使$B^2=A$且$AB=BA$.

⑤ A爲單式矩陣 $\Longrightarrow$ ∃單式矩陣B使$B^2=A$且$AB=BA$.

⑥ A爲厄米特矩陣 $\Longrightarrow$ ∃正則矩陣B使$B^2=A$, $AB=BA$, 並滿足:

若x+iy($x, y\in\mathbb{R}$)爲B的特徵值, 則x=0或y=0

⑦ A爲斜厄米特矩陣 $\Longrightarrow$ ∃正則矩陣B使$B^2=A$, $AB=BA$, 並滿足:

若x+iy($x, y\in\mathbb{R}$)爲B的特徵值, 則$|x|=|y|$.

⑧ A爲正則矩陣 $\Longrightarrow$ ∃正則矩陣B使$B^2=A$且$AB=BA$.

(b) 設A爲$n\times n$實數矩陣.

① A爲正定矩陣 $\Longrightarrow$ ∃正定實數矩陣B使$B^2=A$且$AB=BA$.

② A爲正半定矩陣 $\Longrightarrow$ ∃正半定實數矩陣B使$B^2=A$且$AB=BA$.

【要訣】(1) 實數對稱矩陣未必有實平方根矩陣. 例如diag(1,–1). (見CH16定理15)

(2) 實數正交矩陣未必有實平方根矩陣. 例如diag(1,–1)

(3) 實數負定矩陣未必有實平方根矩陣. 例如diag(–1,–2).

【證】(a) 取單式矩陣U, 使