P1-38

定理 中間值定理(Intermediate Value Thm.)

......

$f(a) < m < f(b)$ 。

......

P1-50

<法二>定義法(會較慢！)

......

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^{1/3}(x+3)^{2/3}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}x^{1/3}\left[(x+3)^{2/3}-x^{2/3}\right]$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{1/3}\left[(x+3)^{2/3}-x^{2/3}\right]\left[(x+3)^{4/3}+(x+3)^{2/3}x^{2/3}+x^{4/3}\right]}{(x+3)^{4/3}+(x+3)^{2/3}x^{2/3}+x^{4/3}}$$

......

P1-56

(1)意義： ......

$$\left|(2x+2)-8\right|<\varepsilon$$

(2)因此： $\left|(2x+2)-8\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|2(x-3)\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|x-3\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

P1-67

10. 令 $x=-t$ 代入原式得

原式 ......

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-4t+2}{\sqrt{t^2-2t+7}+\sqrt{t^2+2t+5}}=-2$$ 。

P2-3最後一行

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 存在，......。

P2-18

1.加法公式(最基本)

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\\(2)\ \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\end{array}\right\}\text{工具！}$$

......

4.二倍角公式：

(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ ～記！

(2) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$

5.三倍角公式：(少用！)

(1) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ (2) $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

P2-31

<法一>對數微分法

.....

再取微分：$\frac{y'}{y}=\left[(\cos x)\ln(\tan x)+(\sin x)\cdot\frac{\sec^2 x}{\tan x}\right]$

P2-36

1.Leibnitz 微分公式：

由 $(fg)'=f'g+fg'$

$(fg)''=f''g+f'g'+f'g'+fg''=f''g+2f'g'+fg''$

$(fg)'''=f'''g+3f''g'+3f'g''+fg'''$

$(fg)''''=f''''g+4f'''g'+6f''g''+4f'g'''+fg''''$

$\vdots$

即利用二項式定理展開可得

$[f(x)g(x)]^{(n)}=C_0^n f^{(n)}(x)g(x)+C_1^n f^{(n-1)}(x)g'(x)+\cdots+C_n^n f(x)g^{(n)}(x)$

P2-36最後一行

$f''''(x)=5^4\sin 5x$ ，歸納得 $f^{(73)}(x)=5^{73}\cos 5x$ 。

P2-40

[解]

<法一>視 $y=y(x)$，對原式之 x 微分得

$$6(x^2+y^3)^5(2x+3y^2y')=3x^2-2yy'$$

P2-60

加法公式：(同學可依**定義式**自行推出)～知道即可！

1. $\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$
2. $\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y$ （此式與三角函數公式不同）

P3-7

答 令 $x=\dfrac{1}{t}$，．．．．．．

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{3}(t^3+t+1)^{-2/3}\cdot(3t^2+1)}{1}=\frac{1}{3}$$ 。

P3-18

答 如圖所示，．．．．．．．

$\therefore\ x(t)=4\tan\theta(t)$

P3-42

<法二>當 $f(x)$ 為多項式時，．．．．．．

$$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)=0\to x=0,\ 3$$

P4-42

答 化為部份分式得

．．．．．．

則原式 $=\ln|x-1|+\ln|x^2-2x+2|-\tan^{-1}(x-1)+C$ 。

P4-60

7. 原式 $=\int\sqrt{(x-3)^2-2^2}\,dx \underset{x-3=2\sec\theta}{=} \int\sqrt{4\sec^2\theta-4}(2\sec\theta\tan\theta\,d\theta)$

P5-37

5. 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cdot(\cos^2 x)^2\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cdot(1-\sin^2 x)^2\,dx$

. . . . . .

P5-52

1. 四等分，. . . . . .

原式 $\approx\frac{\frac{1}{4}}{3}\left[1\cdot1+4\cdot\sqrt{1+(0.25)^2}+2\cdot\sqrt{1+(0.5)^2}+4\cdot\sqrt{1+(0.75)^2}+1\cdot\sqrt{2}\right]$

P6-26最後一行

$$=\left[3\theta-4\cos\theta-\sin 2\theta\right]_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{3\pi}{2}}=\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

P7-28最後一行

[解]說明：$(2n)!!\equiv(2n)\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\cdots4\cdot2$

P7-40

$\boxed{\text{定義}}$ 冪級數(power series)～. . . . . .

1. $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$

. . . . . .

2. $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\cdots$

P7-71

<法二>先平移！令 $u=x-1$，則

$$x^2\ln x=(1+u)^2\ln(1+u)=(1+2u+u^2)\left(u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4+\cdots\right)$$

. . . . . .

P7-75

㊟

<法一>具微分規律性之函數可以直接計算！

$$f'(x)=3(2x-1)^{1/2}\,,\ f''(x)=3(2x-1)^{-1/2}\,,\ f'''(x)=-3(2x-1)^{-3/2}\,,\ \cdots$$

. . . . . .

<法二>先平移再利用二項式展開！令 $u=x-1$，則

$$(2x-1)^{3/2}=(1+2u)^{3/2}=1+3u+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2!}(2u)^2+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{3!}(2u)^3+\cdots$$

. . . . . .

P8-11

1 . . . .

$$\text{原式}=\lim_{r\to0}\frac{\sin(r^2\cos\theta\sin\theta)}{r\cos\theta}=\lim_{r\to0}\frac{2r\cos\theta\sin\theta\cdot\cos(r^2\cos\theta\sin\theta)}{\cos\theta}=0\text{。}$$

P8-12第三行

$$\frac{\partial f}{\partial x}\equiv\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

P8-22

4 . . . .

$$\text{原式}=(-2xy-z^2+2xz+y^2)+(-x^2-2yz+2xy+z^2)$$

. . . . . .

P8-24第三行

以表為 $\Delta z=f_x(a,b)\Delta x+f_y(a,b)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$

P8-26

双變數：$\displaystyle\lim_{\substack{h\to0\\k\to0}}\frac{|f(x+h,y+k)-f(x,y)-hf_x(x,y)-kf_y(x,y)|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$ ～**檢驗式**

P8-30第三行

$$=\frac{6re^{s}+s\cos(rs)}{\sqrt{1-(3r^{2}e^{s}+\sin rs)^{2}}}$$

P8-74第二行

$$d^{2}(x,y)=(x-1)^{2}+(y-2)^{2}+x^{2}+2y^{2}=2x^{2}-2x+3y^{2}-4y+5\equiv D$$

P8-75

當限制條件有二個時，. . . . . .

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=f(x,y,z)+\lambda_1 g_1(x,y,z)+\lambda_2 g_2(x,y,z)$$

P8-84

答 令 $L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=xy+z^{2}+\lambda_1(y-x)+\lambda_2(x^{2}+y^{2}+z^{2}-4)$

P8-95

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^{2}+xy+y^{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot mx}{x^{2}+x\cdot mx+m^{2}x^{2}}=\frac{m}{1+m+m^{2}}\to$不存在

P9-20精選習作上一行

$\therefore\ f''(t)=\cos(t^{2})-2t^{2}\sin(t^{2})$。

P9-46倒數第五行

$$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

P9-92

V 恰好為球体之一部份！ $x^{2}+y^{2}+(z-1)^{2}=1\to\rho=2\cos\phi$

P11-19說例2

故 $y(x)=c_1e^{0}+c_2e^{3x}+c_3e^{-3x}=c_1+c_2e^{3x}+c_3e^{-3x}$。

P11-20倒數第三、四行

我們以最簡單的 O.D.E.： $y''-2ay'+a^{2}y=0$ 說明之。其特性方程式為 $\lambda^{2}-2a\lambda+a^{2}=0\Rightarrow\lambda=a,a$ 為二重根，則知其第一組解為 ....