

## • 例題 23 •

令  $X \sim \chi^2(10)$ ， $P \sim \chi^2(20)$ ，若  $X$  與  $P$  互相獨立，則  $Y = 2X/P$  是呈何種分配？

(A)  $F(10,20)$  (B) 常態分配 (C)  $t(10)$ 。

**Sol:** (A)

定理(4)：設  $(X_1, X_2, \dots, X_{n_1})$  為抽自  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  之一組隨機樣本，而  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2})$  為抽自  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  之另一組隨機樣本，若兩常態母體獨立，則

$$F = \frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2}$$

為服從自由度  $n_1 - 1$  及  $n_2 - 1$  的  $F$  分配。

## 【證明】

因兩組樣本皆抽自常態母體，故知

$$\chi_1^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1 - 1), \quad \chi_2^2 = \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2 - 1)$$

再由  $F$  分配定義知

$$F = \frac{\chi_1^2 / \nu_1}{\chi_2^2 / \nu_2} = \frac{\frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma_1^2} / n_1 - 1}{\frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma_2^2} / n_2 - 1} = \frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

## • 例題 24 •

設  $X_1, X_2, X_3, X_4$  為獨立，且具有相同分配  $N(\mu, \sigma^2)$ ，試求下列為何分配？

(1)  $\frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_4 - X_3)^2}$  ; (2)  $\frac{(X_1 - \mu)^2}{(X_2 - \mu)^2}$

**Sol:**(1) 因  $X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ ，故知 $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$ ， $X_4 - X_3 \sim N(0, 2\sigma^2)$ ，又 $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2\sigma^2}} \sim N(0, 1)$ ， $\frac{X_4 - X_3}{\sqrt{2\sigma^2}} \sim N(0, 1)$ ，且  $Z^2 \sim \chi^2(1)$ ，即

$$\frac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)，\frac{(X_4 - X_3)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)$$

又由  $F$  分配之定義知

$$F = \frac{\chi_1^2/v_1}{\chi_2^2/v_2} = \frac{\frac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2}/1}{\frac{(X_4 - X_3)^2}{2\sigma^2}/1} = \frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_4 - X_3)^2} \sim F(1, 1)$$

(2) 因  $\frac{(X_1 - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$ ， $\frac{(X_2 - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$ ，故由  $F$  分配定義知

$$F = \frac{\chi_1^2/v_1}{\chi_2^2/v_2} = \frac{\frac{(X_1 - \mu)^2}{\sigma^2}/1}{\frac{(X_2 - \mu)^2}{\sigma^2}/1} = \frac{(X_1 - \mu)^2}{(X_2 - \mu)^2} \sim F(1, 1)$$

**• 例題 25 •**

假設  $X$ ， $Y$ ， $Z$  為獨立隨機變數， $X$  服從標準常態分配， $Y$  與  $Z$  服從自由度為 4 之卡方分配，下列何者正確？

- (A)  $X/\sqrt{Y}$  為  $t$  分配 (B)  $X/Y$  為  $t$  分配 (C)  $Y/Z$  為  $F$  分配 (D)  $Y/\sqrt{Z}$  為  $F$  分配。

(90 高考)

**Sol:** (C)**• 例題 26 •**

設  $(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1})$  和  $(X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2})$  分別為由兩個獨立的常態母體  $N(\mu_1, \sigma^2)$  和  $N(\mu_2, \sigma^2)$  所取出的  $n_1$  和  $n_2$  個隨機樣本。令