Chapter 8

點估計

8.1 估計之觀念

一、估計之意義

估計（estimation）又稱之為推定，其意義是指利用樣本統計量去估計母體中未知的參數，其內容又區分為點估計（point estimation）及區間估計（interval estimation）兩大類。在本章中，將先探討點估計部分，至於區間估計部分將在下一章探討，今先將其意義分述如下。

㈠**點估計**：點估計之意義是依據母體抽出的一組樣本資料，求出某個樣本統計量之數值，然後利用此數值去估計母體中未知參數之方法。例如，以樣本比例 $\hat{P}$ 估計母體比例 p ，或利用樣本平均數 $\bar{X}$ 估計母體平均數 μ ，以樣本變異數 S^2 估計母體變異數 σ^2 。

㈡**區間估計**：區間估計之意義是依據一組樣本資料，求出兩個樣本統計量之數值，形成一個區間，再利用此區間來說明此區間包含此未知母體參數的信心的估計方法。

二、估計式及估計值之意義

利用樣本統計量去估計母體中未知參數時，此樣本統計量即稱為此參數 θ 之估計式或估計元（estimator），而當獲取一組樣本資料後計算出此估計式之數值即稱之為估計值（estimate）。例如，以 $\bar{X}$ 及 S^2 去估計 μ 及 σ^2 ，則 $\bar{X}$ 及 S^2 即為參數 μ 及 σ^2 的點估計式，但當獲取一組樣本資料 $(x_1, x_2, ..., x_n)$ 代入上式 $\bar{X}$ 及 S^2 即可獲得二個確定數值 $\bar{x}$ 及 s^2 ，此兩數值 $\bar{x}$

及 s^2 即為 μ 及 σ^2 的點估計值。

定義㈠：設 $\hat{\Theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$ 為一個統計量，若它被使用來估計某一未知參數 θ 時，則 $\hat{\Theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$ 即稱為參數 θ 之點估計式，常以符號 $\hat{\Theta}$ 表示之。而當獲取一組實際樣本觀察值 $(x_1, x_2, ..., x_n)$ 所計算出來之 $\hat{\theta}(x_1, x_2, ..., x_n)$ ，稱為參數 θ 之點估計值。

8.2 點估計式之評判標準

估計式 $\hat{\Theta}(X_1, ..., X_n)$ 用來估計未知參數 θ ，但估計式（即樣本統計量）有很多不同形式，因此要如何評判點估計式之優劣，便是點估計的一個重要課題。一般常見之評判標準有下列幾種，即

㈠不偏性（unbiasedness）。

㈡有效性（efficiency）。

㈢一致性（consistency）。

㈣充分性（sufficiency）。

茲將各種評判準則之觀念分述如下。

一、不偏性

㈠**不偏性觀念**：利用樣本資料 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 求取估計式 $\hat{\Theta}$ 之值時，此估計值與被估計之參數 θ 會有某種程度上差異，有時高、有時低，因此若估計式的期望值能等於被估計之參數，則表示在做估計時較無偏頗之虞，亦即產生偏誤的可能性亦較小。

㈡**不偏性之定義**：

定義㈡：設統計量 $\hat{\Theta}$ 為母體參數 θ 的一個估計式，且此估計式 $\hat{\Theta}$ 的期望值等於參數 θ ，即 $E(\hat{\Theta}) = \theta$ ，則稱 $\hat{\Theta}$ 為母體參數 θ 的不偏估計式（unbiased estimator）。但若 $E(\hat{\Theta}) \neq \theta$ ，則稱 $\hat{\Theta}$ 為參數 θ 之偏誤估計式（biased estimator），且其偏誤為 $E(\hat{\Theta}) - \theta = Bias$ 。

Remark

設 $\hat{\Theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 為參數 θ 之函數 $\pi(\theta)$ 之估計式，且

$$E\left(\hat{\Theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right) = \pi(\theta)$$

則稱 $\hat{\Theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 為函數 $\pi(\theta)$ 之不偏估計式。

由定義㈠中可知，要評判一個估計式是否爲參數 θ 之不偏估計式，只要依上述定義求估計式的期望值即可（見圖8-1）。在圖8-1(a)中，可以很明顯地發現 $\hat{\Theta}_1$ 之抽樣分配之期望值 $E(\hat{\Theta}_1) = \theta$，故 $\hat{\Theta}_1$ 爲 θ 之不偏估計式；但在圖8-1(b)中，$\hat{\Theta}_2$ 之期望值並不等於 θ，因此 $\hat{\Theta}_2$ 即爲具有負偏誤之估計式。

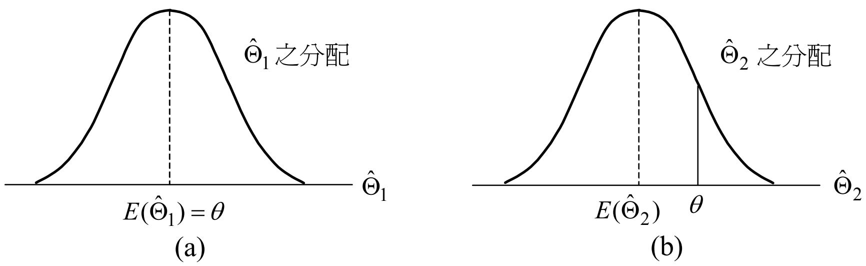

圖8-1　不偏估計式之觀念

例題 1

設 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 為抽自平均數 μ，變異數 σ^2 之母體的一組隨機樣本，試證明樣本變異數 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 為母體變異數 σ^2 之不偏估計式。　（身心障礙四等）

Sol：

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(Var(X_i) + (E(X_i))^2\right) - n\left(Var(\bar{X}) + (E(\bar{X}))^2\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\{n\sigma^2+n\mu^2-\sigma^2-n\mu^2\}$$

$$=\frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2=\sigma^2$$

例題 2

設(X_1,X_2,X_3)為抽自平均數θ的指數母體之一組隨機樣本，今考慮下列θ之估計式

(1) $\hat{\theta}_1=X_1$， (2) $\hat{\theta}_2=\dfrac{X_1+X_2}{2}$， (3) $\hat{\theta}_3=\dfrac{X_1+2X_2}{3}$，

(4) $\hat{\theta}_4=\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}$， (5) $\hat{\theta}_5=\min(X_1,X_2,X_3)$

試問這些估計式是否為不偏估計式？ （地方政府四等）

Sol：

因 $X_i\overset{\text{iid}}{\sim}f(x)=\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$，故知$E(X_i)=\theta$

(1) $E(\hat{\theta}_1)=E(X_1)=\theta$

(2) $E(\hat{\theta}_2)=E\left(\dfrac{X_1+X_2}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\big(E(X_1)+E(X_2)\big)=\dfrac{1}{2}(\theta+\theta)=\theta$

(3) $E(\hat{\theta}_3)=E\left(\dfrac{X_1+2X_2}{3}\right)=\dfrac{1}{3}\big(E(X_1)+2E(X_2)\big)=\dfrac{1}{3}(\theta+2\theta)=\theta$

(4) $E(\hat{\theta}_4)=E\left(\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}\right)=\dfrac{1}{3}\big(E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)\big)$

$$=\frac{1}{3}(\theta+\theta+\theta)=\theta$$

(5) 因$F(x)=\int_0^x\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}}dt=1-e^{-\frac{x}{\theta}}$，故知

$X_{(1)}=\min(X_1,X_2,X_3)$ 之機率密度函數為

$$f_{X_{(1)}}(x)=n[1-F(x)]^{n-1}\cdot f(x)=3[1-(1-e^{-\frac{x}{\theta}})]^{3-1}\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$$

$$=\frac{3}{\theta}e^{-\frac{3}{\theta}x}\quad，x>0$$

所以$\hat{\theta}_5$之期望值為

$$E(\hat{\theta}_5)=E(X_{(1)})=\int_0^{\infty}x\cdot\frac{3}{\theta}e^{-\frac{3}{\theta}x}dx$$

$$=\frac{\theta}{3}\int_0^{\infty}\left(\frac{3}{\theta}x\right)e^{-\frac{3}{\theta}x}d\left(\frac{3}{\theta}x\right)=\frac{\theta}{3}\Gamma(2)=\frac{\theta}{3}\neq\theta$$

故知上述五個估計式中$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_3,\hat{\theta}_4$為不偏估計式。

例題 3

設X和Y為互相獨立的隨機變數，且知$E(X)=6$，$Var(X)=\sigma^2$而$E(Y)=3$，$Var(Y)=\sigma^2$，今有σ^2之估計量為$K(X^2-Y^2)+Y^2$，其中K為常數，試問：K為何值，才能使此估計量成為σ^2之不偏估計量？
(A) -0.14 (B) -0.19 (C) -0.33 (D) -0.66。 （普考）

Sol：

因 $E[k(X^2-Y^2)+Y^2]=k[E(X^2)-E(Y^2)]+E(Y^2)$

$$=k\{Var(X)+\left(E(X)\right)^2-[Var(Y)+\left(E(Y)\right)^2]\}$$

$$+[Var(Y)+\left(E(Y)\right)^2]$$

$$=k\{\sigma^2+36-[\sigma^2+9]\}+[\sigma^2+9]$$

$$=27k+9+\sigma^2$$

故知$27k+9+\sigma^2=\sigma^2\Rightarrow k=\dfrac{-9}{27}=-0.33$，故選(C)。

(三)不偏性的性質：

1. 不偏性與抽樣時的樣本數大小無關。

2. 並非所有參數皆具有不偏估計式。例如均勻分配$U(\alpha,\beta)$，其參數

α 與 β 皆找不到不偏估計式。

3. 參數 θ 的偏誤估計式，大部分皆可經過調整後，成爲不偏估計式。但並非所有參數的偏誤估計式皆可經調整後，成爲不偏估計式。
4. 參數若具有不偏估計式，則不偏估計式有時不只一個，亦具不偏性不具有唯一性。
5. 不偏性只是評斷估計式好壞之一種標準，因此並不能說不偏估計式就是最佳估計式。

二、有效性

任何一個參數 θ 皆有很多個不偏估計式，接下來將介紹一些方法能在眾多不偏估計式中找出相對有效（relatively efficiency）估計式或絕對有效（absolutely efficiency）估計式。

定義㈢：設 $(X_1, X_2, ..., X_n)$ 爲抽自母體 $f(x;\theta)$ 之一組隨機樣本，且 $\hat{\Theta}_1$ 與 $\hat{\Theta}_2$ 均爲參數 θ 之不偏估計式，若

$$Var(\hat{\Theta}_1) < Var(\hat{\Theta}_2)$$

則在估計 θ 時，估計式 $\hat{\Theta}_1$ 較 $\hat{\Theta}_2$ 相對有效。

在定義㈢中可看出在不偏估計式中，是以變異數大小作爲衡量標準，變異數小表示估計式 $\hat{\Theta}$ 之所有值較接近 θ，因此估計式較有效。相對地變異數大，則估計式所有值則較分散，因此估計式較不好（見圖8-2）。

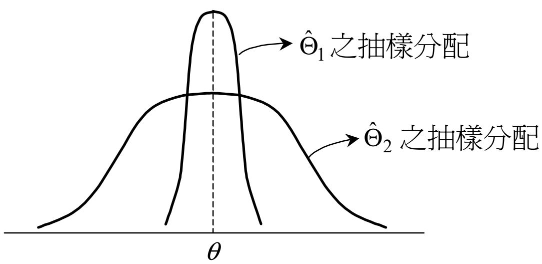

圖8-2 $\hat{\Theta}_1$ 較 $\hat{\Theta}_2$ 相對有效性之圖示

例題 4

在例題2中，試問在不偏估計式中，何者較有效？