

令 $\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_0} = 0$, $\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} = 0$, $\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = 0$, 即可知

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i) X_i = 0 \\ \frac{n}{2\sigma^2} - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2}{2\sigma^4} = 0 \end{cases}$$

解上式之聯立方程式，即可獲知 β_0 、 β_1 及 σ^2 之最大概似估計式為

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n \bar{X} \bar{Y}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ \hat{\beta}_0 &= \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2}{n} \end{aligned}$$

12.3 迴歸參數之統計推論

在本節及後述中，除非另有說明，否則我們在討論迴歸參數統計推論時，皆假設 ε_i 服從常態分配，即

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad , \quad \varepsilon_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

且稱之常態迴歸模式。

一、 β_1 之統計推論

迴歸參數 β_1 未知以普通最小平方估計式 (O.L.S.E.) $\hat{\beta}_1$ 估計之，故對於 β_1 之統計推論可利用 $\hat{\beta}_1$ 之抽樣分配。

($\Rightarrow$) $\hat{\beta}_1$ 的抽樣分配：

$$\begin{aligned}\text{因 } \hat{\beta}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})Y_i - \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})\bar{Y}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})Y_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) Y_i = \sum_{i=1}^n K_i Y_i\end{aligned}$$

其中 $K_i = \frac{X_i - \bar{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ ，所以 $\hat{\beta}_1$ 為 $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 之線性組合，亦即為

常態分配的線性組合，故知其抽樣分配為常態分配，又

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n K_i &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = 0 \\ \sum_{i=1}^n K_i X_i &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{(X_i - \bar{X})X_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{其中 } \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X}) = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})X_i - \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})\bar{X} \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) \cdot X_i\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n K_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right)^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

所以 $\hat{\beta}_1$ 之期望值與變異數為

$$E(\hat{\beta}_1) = E\left(\sum_{i=1}^n K_i Y_i\right) = \sum_{i=1}^n K_i \cdot E(Y_i) = \sum_{i=1}^n K_i (\beta_0 + \beta_1 X_i)$$

$$= \beta_0 \sum_{i=1}^n K_i + \beta_1 \sum_{i=1}^n K_i X_i = \beta_0 \times 0 + \beta_1 \times 1 = \beta_1$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}_1) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n K_i Y_i\right) = \sum_{i=1}^n K_i^2 \text{Var}(Y_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n K_i^2 = \frac{\sigma^2}{S_{XX}}$$

$$\text{即 } \hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{S_{XX}}\right)$$

($\Rightarrow$) β_1 之區間估計：

因 σ^2 未知，故 $Z = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{S_{XX}}}}$ 不為樞紐量，但因 $\frac{SSE}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$ ，所以

由 T 分配之定義知

$$T = \frac{\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{S_{XX}}}}}{\sqrt{\frac{\chi^2}{\nu}}} = \frac{\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{SSE}{S_{XX}}}}}{\sqrt{\frac{\frac{SSE}{\sigma^2}}{n-2}}} = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{MSE}{S_{XX}}}} \sim t(n-2)$$

上述 T 分配可作為樞紐量，因此可用來發展 β_1 之統計推論方法，又

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \leq \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sqrt{\frac{MSE}{S_{XX}}}} \leq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \cdot \sqrt{\frac{MSE}{S_{XX}}} \leq \hat{\beta}_1 - \beta_1 \leq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \cdot \sqrt{\frac{MSE}{S_{XX}}}\right) = 1 - \alpha$$

故可將上式加以整理，即可獲知 β_1 之 $100(1-\alpha)\%$ 區間估計量。

定理($\Rightarrow$)：在常態迴歸模式下， β_1 之 $100(1-\alpha)\%$ 區間估計量為

$$\left(\hat{\beta}_1 - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \cdot \sqrt{\frac{MSE}{S_{XX}}}, \hat{\beta}_1 + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \cdot \sqrt{\frac{MSE}{S_{XX}}}\right)$$

$$\text{其中 } S_{XX} = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{。}$$

Remark •

在定理(三)中常利用符號 $S_{\hat{\beta}_1}^2$ 或 $S^2(\hat{\beta}_1)$ 來表示 $\sigma_{\hat{\beta}_1}^2 = \sigma^2(\hat{\beta}_1)$ 之估計值，故上述區間估計量可簡寫為

$$\left(\hat{\beta}_1 - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \cdot S(\hat{\beta}_1), \hat{\beta}_1 + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) \cdot S(\hat{\beta}_1) \right)$$

其中 $S(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\frac{MSE}{S_{XX}}}$ 稱為 $\sigma_{\hat{\beta}_1}$ 之估計標準誤差。

(三) β_1 之假設檢定：

定理(四)：在常態迴歸模式下，關於 β_1 之假設檢定：

假設檢定型態	檢定統計量	危險域
$H_0: \beta_1 = b_1$ $H_1: \beta_1 \neq b_1$	$T = \frac{\hat{\beta}_1 - b_1}{\sqrt{\frac{MSE}{S_{XX}}}}$	$C = \{t \mid t > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\}$
$H_0: \beta_1 \leq b_1$ $H_1: \beta_1 > b_1$	$T = \frac{\hat{\beta}_1 - b_1}{\sqrt{\frac{MSE}{S_{XX}}}}$	$C = \{t \mid t > t_{\alpha}(n-2)\}$
$H_0: \beta_1 \geq b_1$ $H_1: \beta_1 < b_1$	$T = \frac{\hat{\beta}_1 - b_1}{\sqrt{\frac{MSE}{S_{XX}}}}$	$C = \{t \mid t < -t_{\alpha}(n-2)\}$

Remark •

1. 在定理(四)中之檢定，亦可利用信賴區間作檢定。
2. 在定理(四)中，若檢定型態為檢定 β_1 是否為零，即

$$H_0: \beta_1 = 0; H_1: \beta_1 \neq 0$$

則此時檢定統計量為

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{S(\hat{\beta}_1)}$$

且稱為 t -ratio，可用來判斷自變數 X 對因變數 Y 是否有影響。