§6-6 傅立葉變換與性質

傅立葉變換共有三種類型：

一. 傅立葉餘弦變換：$f(x)$ 僅定義於 $(0,\infty)$，且視函數為偶函數。

二. 傅立葉正弦變換：$f(x)$ 僅定義於 $(0,\infty)$，且視函數為奇函數。

三. 傅立葉變換：$f(x)$ 定義於 $(-\infty,\infty)$，為時間與頻率的互換。

(一)傅立葉餘弦變換

視 $f(x)$ 是偶函數時，由上節之傅立葉餘弦積分公式知

$$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega \ , \ A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx$$

若令 $F_c(\omega)\equiv\sqrt{\frac{\pi}{2}}A(\omega)$，其中下標 c 代表“cosine”，並將 $F_c(\omega)$ 視為一新的函數，即可得到 $f(x)$ 與 $F_c(\omega)$ 互換之傅立葉餘弦變換如下：

$$\begin{cases} F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx & \cdots(1a) \\ f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\omega)\cos\omega x d\omega & \cdots(1b) \end{cases}$$

特別說明

1. 所謂傅立葉餘弦變換或稱為傅立葉餘弦積分，其實指的是同一個式子。
2. 由$(1a)$與$(1b)$式，令積分符號前之係數分別為 α、β，即

$$\begin{cases} F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx\equiv\alpha\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx \\ f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\omega)\cos\omega x d\omega\equiv\beta\int_0^\infty F_c(\omega)\cos\omega x d\omega \end{cases}$$

吾人發現必有 $\alpha\beta=\frac{2}{\pi}$，亦即不論如何選取 α、β，只要其乘積等於 $\frac{2}{\pi}$ 皆可代表傅立葉餘弦積分！

(二)傅立葉正弦變換

視 $f(x)$ 是奇函數時，由上節之傅立葉正弦積分公式知

$$f(x)=\int_0^{\infty}B(\omega)\sin\omega x d\omega \;,\; B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega x dx$$

若令 $F_s(\omega)\equiv\sqrt{\frac{\pi}{2}}B(\omega)$，其中下標 s 代表“sine”，即可得到 $f(x)$ 與 $F_s(\omega)$ 互換之變換如下：

$$\begin{cases} F_s(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega x dx & \cdots(2a) \\ f(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty}F_s(\omega)\sin\omega x d\omega & \cdots(2b) \end{cases}$$

(2a)、(2b)即稱為**傅立葉正弦變換公式**。

(三) 傅立葉變換(Fourier transform)

$$F(\omega)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx \quad \text{（口訣：“求負”）} \quad \cdots(3)$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \quad \text{（口訣：“返正”）} \quad \cdots(4)$$

原函數 $f(x)$ 與譜函數 $F(\omega)$ 互稱為**傅立葉變換對**。

(四) 傅立葉變換之性質

1.傅立葉變換之存在理論有以下二個條件：

(1)函數 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 為分段連續。

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$，即此積分存在，具備此種性質之 $f(x)$ 稱為**絕對值可積分**(absolute integrable)。

2.線性理論

$$\Im\{af(x)+bg(x)\}=a\Im\{f(x)\}+b\Im\{g(x)\}$$

3.第一移位性質[原函數 $f(x)$ 右移 a 單位，即 time-shift]

若 $\Im\{f(x)\}=F(\omega)$，則 $\boxed{\Im\{f(x-a)\}=e^{-ia\omega}F(\omega)}$

4.第二移位性質[譜函數 $F(\omega)$ 右移 a 單位，即 freq.-shift]

若 $\Im\{f(x)\}=F(\omega)$，則 $\boxed{\Im\{e^{iax}f(x)\}=F(\omega-a)}$ ～ 調頻性質

推論 $\Im\{f(x)\cos ax\}=\frac{1}{2}\left[F(\omega-a)+F(\omega+a)\right]$ ～ 諧調整(modulation)性質

證明：$\Im\{f(x)\cos ax\}=\Im\left\{f(x)\cdot\frac{1}{2}\left[e^{iax}+e^{-iax}\right]\right\}=\Im\left\{\frac{1}{2}f(x)e^{iax}\right\}+\Im\left\{\frac{1}{2}f(x)e^{-iax}\right\}$

$=\frac{1}{2}\left[F(\omega-a)+F(\omega+a)\right]$ (得證)

稱爲“諧調整”性質。

推論 同理可得 $\Im\{f(x)\sin ax\}=\frac{1}{2i}\left[F(\omega-a)-F(\omega+a)\right]$。

5.微分性質

若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$，則 $\boxed{\Im\{f'(x)\}=i\omega\Im\{f(x)\}}$

推論 (1)若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}f'(x)=0$，則 $\Im\{f''(x)\}=(i\omega)^2\Im\{f(x)\}$

(2)依此類推，有 $\Im\left\{f^{(n)}(x)\right\}=(i\omega)^n\Im\{f(x)\}$。

6.積分性質

若 $\Im\{f(x)\}=F(\omega)$，且 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=F(0)=0$，則

$$\boxed{\Im\left\{\int_{-\infty}^{x}f(\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{i\omega}F(\omega)}$$

7.乘 x 性質：若 $\Im\{f(x)\}=F(\omega)$，則 $\boxed{\Im\{xf(x)\}=i\frac{dF}{d\omega}}$

推論 若 $\Im\{f(x)\}=F(\omega)$，則 $\boxed{\Im\left\{x^n f(x)\right\}=i^nF^{(n)}(\omega)}$

8.除 x 性質：若 $\Im\{f(x)\}=F(\omega)$，則 $\boxed{\Im\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}=\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\omega}F(u)du}$

推論 若 $\Im\{f(x)\}=F(\omega)$，則 $\boxed{\Im\left\{\frac{f(x)}{x^2}\right\}=\frac{1}{i^2}\int_{-\infty}^{\omega}\int_{-\infty}^{\omega}F(u)dudu}$