

第八章 估計

建立區間估計是本章重要題型之一，建議讀者回答時不要只寫結論，推導過程也很重要，出題老師可以從回答上得知應考者之實力如何，因此這種題型是給有充分準備之應考者表現實力的地方，不要只為了解出答案而回答。

有關區間估計之另一種題型就是計算樣本數，讀者也要多加留意它的推導過程，盡量在回答中表現你的實力。

➡選擇觀念題

範題 (1)

假設 $X_1, \dots, X_n$ 是一組取自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的隨機樣本，則下列敘述何者正確？

(1) 統計量 $\frac{(X_1 + \dots + X_n)}{n}$ 適合估計 μ 。

(2) 統計量 $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{(n-1)}$ 適合估計 σ^2 。

(A) 僅(1) (B) 僅(2) (C) (1)和(2)皆是 (D) 二者皆非。

【解析】(A)

當 μ 已知時，應利用 $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n}$ 不需考慮自由度寫法之樣本變異數估計 σ^2 。

範題 (2)

在民意調查中，若採用簡單隨機抽樣得到樣本，則下列敘述何者正確？

(1) 若要維持相同的準確度，則2倍大小母體，需要2倍的樣本數。

(2) 若增加樣本數，則可以縮小95%信賴區間的寬度。

(A)僅(1) (B)僅(2) (C)(1)和(2)皆是 (D)二者皆非。

【解析】(B)

題目中提到了「簡單隨機抽樣」只是告訴我們樣本是隨機樣本，(1)中準確度意指不偏性，因不偏性與樣本大小無關，故(1)錯，而(2)中樣本數增加，標準誤變小，信賴區間的寬度縮小。

範題 3

假設 $X_1, \dots, X_n$ 是取自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的隨機樣本，下列何者是有偏差，但我們還很喜歡使用的統計量？ (A) $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ ：估計 μ

(B) $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_{n-1}}{n}$ ：估計 μ (C) $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ ：估計 σ^2

(D) $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$ ：估計 σ^2 。

【解析】(D)

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2, E\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}\right) = n-1 \Rightarrow E\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}\right) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

雖然 $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$ 沒有不偏性，但仍然滿足一致性。

範題 4

擲一個6面骰子 n 次，設 X 是出現3點或者6點的次數，又設 $p = \text{Pr}\{\text{擲一次骰子出現3點或者6點}\}$ 。則下列何者是 p 的不偏估計量？

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{X}{3}$ (C) $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ (D) $\frac{X}{n}$ 。

【解析】(D)

樣本成功比例 = $\frac{\text{總成功次數}}{\text{總實驗次數}} = \frac{X}{n}$ (成功事件：出現3點或6點)

範題 5

續上題。P 的 95% 信賴的逼近區間是 (若 $\hat{p}$ 是上題中 p 的估計，使用 $\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$ 當作 $\text{var}(\hat{p})$ ，亦，假設 n 夠大；又記 $\hat{\sigma}^2 = \hat{p}(1-\hat{p})$)

- (A) $\hat{p} \pm 1.96 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$ (B) $\hat{p} \pm 1.96 \hat{\sigma} \sqrt{n}$ (C) $\hat{p} \pm 1.96 \hat{\sigma}$ (D) 以上皆非。

【解析】(A)

$$\hat{p} \pm 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \hat{p} \pm 1.96 \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

範題 6

若 $X_1, \dots, X_{100}$ 是取自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的隨機樣本，假設 $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_{100}}{100}$ ， σ^2 已知為 100。則 μ 的 95.4% 信賴區間是： (A) $\bar{x} \pm 0.1$ (B) $\bar{x} \pm 0.2$
(C) $\bar{x} \pm 1$ (D) $\bar{x} \pm 2$ 。

【解析】(D)

$$\bar{x} \pm 2 \frac{10}{\sqrt{100}} = \bar{x} \pm 2$$

範題 7

統計式 $W = \frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^n X_i$ 服從 $\chi^2_{(2n)}$ 。如得一 X 之樣本資料如下：15，20，16，19，20，22，14，16，利用 W 得 θ 之 90% 信賴區間約為：
(A)(10.800, 35.671) (B)(12.068, 23.432) (C)(13.034, 22.466)
(D)(18.314, 103.929)。(93 高考)