Part 4

常見機率模式

範題 1 ★★☆☆

設 $X \sim b(n,p)$，即 $f(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$， $x=0,1,2,\ldots,n$

⑴求隨機變數 X 之動差母函數。
⑵利用⑴求 $E(X)$ 及 $Var(X)$。

Sol：

⑴ $M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$

$=\sum_{x=0}^{\infty}\binom{n}{x}(pe^t)^x(1-p)^{n-x}$

$=[1-p+pe^t]^n$ （利用二項展開式）

⑵因 $M'_X(t)=n(1-p+pe^t)^{n-1}\cdot pe^t$，故知

$E(X)=M'_X(0)=n(1-p+pe^0)^{n-1}\cdot pe^0=np$

又 $M''_X(t)=n(n-1)(1-p+pe^t)^{n-2}\cdot(pe^t)^2+n(1-p+pe^t)^{n-1}\cdot pe^t$，所以

$E(X^2)=M''_X(0)$

$=n(n-1)(1-p+pe^0)^{n-2}\cdot(pe^0)^2+n(1-p+pe^0)^{n-1}\cdot pe^0$

$=n(n-1)p^2+np$

故知 X 之變異數為

$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=n(n-1)p^2+np-(np)^2$

$$= n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2 = np(1-p)$$

★★☆☆

範題 2

設二項隨機變數 $Y=\sum_{i=1}^{6} X_i \sim b(20,p)$，其中 $\{X_i\}_1^6$ 彼此間獨立，且已知 $X_i \sim b(i,p)$，$i=1,2,3,4,5$ 。

⑴試求 X_6 之分配。

⑵求 X_1+X_6 之分配，並計算期望值 $E(X_1+X_6)^2$ 。

Sol：

⑴因 $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} b(i,p)$ ，$i=1,2,3,4,5$ ，故知 $\sum_{i=1}^{5} X_i \sim b(15,p)$

今令 $X_6 \sim b(m,p)$ ，所以 $\sum_{i=1}^{5} X_i + X_6 \sim b(15+m,p)$ ，又

$\sum_{i=1}^{6} X_i \sim b(20,p)$ ，故由二項分配之加法性知 $15+m=20$ ，

即 $m=5$ ，即 $X_6 \sim b(5,p)$

⑵因 $X_1 \sim b(1,p)$ ， $X_6 \sim b(5,p)$ 且 X_1 與 X_6 獨立，

故由二項分配之加法性知 $X_1+X_6 \sim b(6,p)$

因 $E[(X_1+X_6)^2] = Var[(X_1+X_6)] + [E(X_1+X_6)]^2$

$$= 6p(1-p) + (6p)^2 = 6p(1+5p)$$

★★☆☆

範題 3

有一射手平均每射5發子彈有3發命中，請問：

⑴n發中一發也不命中之機率？

⑵該射手最少有一發命中之機率大於0.999時，需射擊n發子彈。請問n是多少（已知 $\log_{10} 2 = 0.3010$ $\log_{10}2 = 0.3010$ ）？

Sol：

⑴設隨機變數X表示射n發中命中目標之次數，則 $X \sim b(n,0.6)$