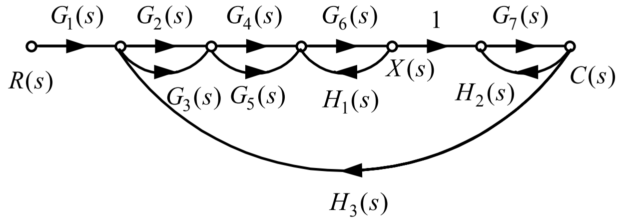
Chapter 3 控制系統表示法

Automatic Control Systems

範題 1

考慮如下一個控制系統的信號流程圖，請利用梅氏法則求轉移函數 ㈠$C(s)/R(s)$ ㈡$C(s)/X(s)$。



（25%）（99高考三級）

Ans:

㈠前向路徑

$$P_1 = G_1 \times G_2 \times G_4 \times G_6 \times 1 \times G_7$$
$$P_2 = G_1 \times G_3 \times G_4 \times G_6 \times 1 \times G_7$$
$$P_3 = G_1 \times G_2 \times G_5 \times G_6 \times 1 \times G_7$$
$$P_4 = G_1 \times G_3 \times G_5 \times G_6 \times 1 \times G_7$$

迴路

$$L_1 = G_6 \times H_1$$
$$L_2 = G_7 \times H_2$$
$$L_3 = G_2 \times G_4 \times G_6 \times 1 \times G_7 \times H_3$$
$$L_4 = G_3 \times G_4 \times G_6 \times 1 \times G_7 \times H_3$$
$$L_5 = G_2 \times G_5 \times G_6 \times 1 \times G_7 \times H_3$$
$$L_6 = G_3 \times G_5 \times G_6 \times 1 \times G_7 \times H_3$$

$$\begin{aligned}\Delta &= 1-(L_1+L_2+L_3+L_4+L_5+L_6)+(L_1L_2)\\ &= 1-G_6H_1-G_7H_2-G_2G_4G_6G_7H_3-G_3G_4G_6G_7H_3\\ &\quad -G_2G_5G_6G_7H_3-G_3G_5G_6G_7H_3+G_6G_7H_1H_2\\ &= 1-G_6H_1-G_7H_2-G_6G_7H_3(G_2+G_3)(G_4+G_5)+G_6G_7H_1H_2\end{aligned}$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = 1$$

$$\Delta_3 = 1$$

$$\Delta_4 = 1$$

應用梅氏法則可得到轉移函數為

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{4} P_i\Delta_i}{\Delta} = \frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2+P_3\Delta_3+P_4\Delta_4}{\Delta}$$

$$= \frac{G_1G_6G_7(G_2+G_3)(G_4+G_5)}{1-G_6H_1-G_7H_2-G_6G_7H_3(G_2+G_3)(G_4+G_5)+G_6G_7H_1H_2}$$

㈡因為 $X(s)$ 不是輸出節點，所以必須處理如下

$$\frac{C(s)}{X(s)} = \frac{C(s)/R(s)}{X(s)/R(s)}$$

而 $C(s)/R(s)$ 已在㈠小題中求得，因此只要再求 $X(s)/R(s)$ 即可。視 $X(s)$ 為輸出節點則可看出

前向路徑

$$P_1 = G_1\times G_2\times G_4\times G_6$$

$$P_2 = G_1\times G_3\times G_4\times G_6$$

$$P_3 = G_1\times G_2\times G_5\times G_6$$

$$P_4 = G_1\times G_3\times G_5\times G_6$$

迴路與㈠小題相同，所以 Δ 亦相同，而

$$\Delta_1 = 1-L_2 = 1-G_7H_2$$

$$\Delta_2 = 1-L_2 = 1-G_7H_2$$

$$\Delta_3 = 1-L_2 = 1-G_7H_2$$

$$\Delta_4 = 1-L_2 = 1-G_7H_2$$

應用梅氏法則，可得到

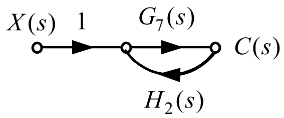
$$\frac{C(s)}{X(s)}=\frac{\sum_{i=1}^{4}P_i\Delta_i}{\Delta}=\frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2+P_3\Delta_3+P_4\Delta_4}{\Delta}$$

$$=\frac{G_1G_6(G_2+G_3)(G_4+G_5)(1-G_7H_2)}{\Delta}$$

所以

$$\frac{C(s)}{X(s)}=\frac{\dfrac{C(s)}{R(s)}}{\dfrac{X(s)}{R(s)}}=\frac{\dfrac{G_1G_6G_7(G_2+G_3)(G_4+G_5)}{\Delta}}{\dfrac{G_1G_6(G_2+G_3)(G_4+G_5)(1-G_7H_2)}{\Delta}}=\frac{G_7}{1-G_7H_2}$$

〈另解〉$C(s)$ 與 $X(s)$ 之關係可直接考慮信號流程圖如下



前向路徑 $P_1=1\times G_7$，迴路 $L_1=G_7H_2$，則 $\Delta=1-L_1=1-G_7H_2$，而 $\Delta_1=1$，所以

$$\frac{C(s)}{X(s)}=\frac{P_1\Delta_1}{\Delta}=\frac{G_7}{1-G_7H_2}$$

範題 2

一機械系統之運動方程式為：

$$2\dot{x}+3\dot{y}-x-2y=u$$

$$\dot{x}-\dot{y}+2y=-u$$

其中 u 為系統輸入（input），y 為系統輸出（output）。

㈠請求此系統之轉移函數（transfer function）。（10%）

㈡請判斷此系統之穩定性（stability）。（10%）（95高考三級）

Ans:

㈠將運動方程式取拉氏轉換，並令初值皆爲零，可得到

$$2sX(s)+3sY(s)-X(s)-2Y(s)=U(s)$$

$$\Rightarrow (2s-1)X(s)+(3s-2)Y(s)=U(s) \quad \cdots\cdots ①$$

$$sX(s)-sY(s)+2Y(s)=-U(s)$$

$$\Rightarrow sX(s)-(s-2)Y(s)=-U(s) \quad \cdots\cdots ②$$

將式①及②消去 $X(s)$ ，可得到

$$s(3s-2)Y(s)+(2s-1)(s-2)Y(s)=sU(s)+(2s-1)U(s)$$

由上式即可解得轉移函數如下

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{3s-1}{5s^2-7s+2}$$

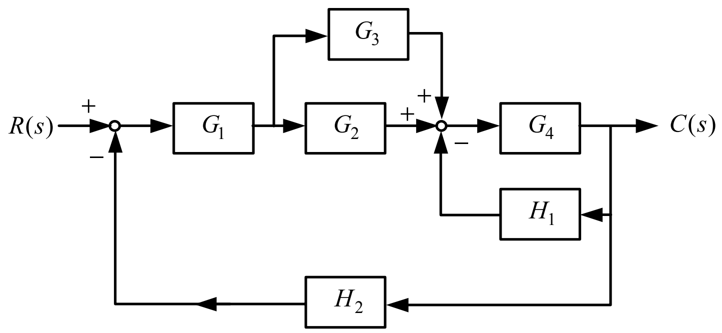
㈡轉移函數之極點為

$$s=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\times5\times2}}{2\times5}=\frac{7\pm3}{10}=+1,+0.4$$

因為極點都在 s 平面之右半面，所以系統為不穩定。

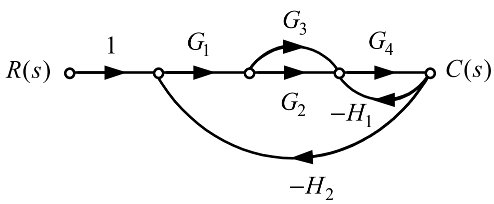
範題 3

對於下圖所示系統，畫出信號流程圖（signal flow graph），並求其轉移函數（transfer function）$T(s)=C(s)/R(s)$ 。　（20%）（93高考三級）



Ans:

⑴訊號流程圖如下



⑵前向路徑