100年專門職業及技術人員高等考試建築師、技師、第2次食品技師考試暨普通考試不動產經紀人、記帳士考試試題

等別： 高等考試　　　　　　　　　　代號：01250

類科： 電子工程技師

科目：工程數學(包括線性代數、微分方程、向量分析、複變函數與機率)

考試時間： 2 小時　　　　　　　　　座號：

※注意： (一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

一、假設 X 及 Y 是三維歐氏(Euclidean)向量空間中的向量，證明其外積(cross product)即 $X \times Y$ 必垂直於 X 及 Y。（5 分）

二、試以複變理論求積分 $\oint_{|z|=1.5} \dfrac{-3z+4}{z(z-1)(z-2)} dz$ 。（10 分）

三、(一)試以時域(time-domain)方式，求解下列聯立微分方程：

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) - 2y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) - 3y(t) \end{aligned}$$

其中 $x(0)=1, y(0)=0$ 。（20 分）

(二)試以拉普拉斯轉換（Laplace transform）方式求解上小題(一)之聯立微分方程。（15 分）

四、假設 X 爲高斯隨機變數(Gaussian random variable)，其機率密度爲 $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$，試求其二階矩(second moment) $E[X^2]$ 。（15 分）

五、已知矩陣 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$，$f(x) = x^2 - 2x + 3$：

(一)求矩陣 **A** 之特徵值及特徵向量。(10 分)

(二)求矩陣 $f(\mathbf{A})$ 之特徵值及特徵向量。(15 分)

(三)試問矩陣 $f(\mathbf{A})$ 之特徵值與矩陣 **A** 之特徵值，兩者之間滿足何種關係？(10 分)

100 專技電子技師

☞解答

一. 令 $\vec{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，$\vec{Y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$，則

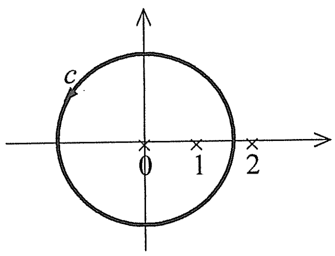
$$\vec{X}\times\vec{Y}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}=(x_2y_3-x_3y_2)\vec{i}+(x_3y_1-x_1y_3)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}$$

$$\therefore\ \vec{X}\cdot(\vec{X}\times\vec{Y})=x_1(x_2y_3-x_3y_2)+x_2(x_3y_1-x_1y_3)+x_3(x_1y_2-x_2y_1)=0$$

$$\therefore\ \vec{Y}\cdot(\vec{X}\times\vec{Y})=y_1(x_2y_3-x_3y_2)+y_2(x_3y_1-x_1y_3)+y_3(x_1y_2-x_2y_1)=0\ 。$$

二. 如右圖所示：

$$I=2\pi i\left[\operatorname{Res}(0)+\operatorname{Res}(1)\right]=2\pi i[2-1]=2\pi i\ 。$$



z 平面

三.

(1) $\begin{cases}x'=x-2y & \cdots(1)\\ y'=2x-3y & \cdots(2)\end{cases}$

從(1)式得 $y=\dfrac{1}{2}(x-x')$，微分得 $y'=\dfrac{1}{2}(x'-x'')$

將以上二式代入(2)式以消去 y 得

$$\frac{1}{2}(x'-x'')=2x-\frac{3}{2}(x-x') \Rightarrow x''+2x'+x=0$$

上式之通解為 $x(t)=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}$

將 $x(t)$ 代回 $y=\frac{1}{2}(x-x')$ 得 $y(t)=c_1e^{-t}+c_2(-\frac{1}{2}e^{-t}+te^{-t})$。

代入 I.C.：$\begin{cases} x(0)=c_1=1 \\ y(0)=c_1-\frac{1}{2}c_2=0 \to c_2=2 \end{cases}$

故 $\begin{cases} x(t)=e^{-t}+2te^{-t} \\ y(t)=2te^{-t} \end{cases}$。

(2) $\xrightarrow{\mathscr{L}} \begin{cases} sX-1=X-2Y \\ sY=2X-3Y \end{cases} \to \begin{cases} (s-1)X+2Y=1 \\ -2X+(s+3)Y=0 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} X(s)=\dfrac{s+3}{(s+1)^2}=\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{(s+1)^2} \\ Y(s)=\dfrac{2}{(s+1)^2} \end{cases}$

故 $\begin{cases} x(t)=e^{-t}+2te^{-t} \\ y(t)=2te^{-t} \end{cases}$。

四. $$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx \overset{y=x-m}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(y+m)^2e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[\int_{-\infty}^{\infty}y^2e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy+2m\cancel{\int_{-\infty}^{\infty}ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy}+m^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy+m^2\cdot\sqrt{2\pi}\sigma\right]$$

$$=\sigma^2+m^2$$ 。

五.

(1) $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)=0$

$\lambda_1 = 1$ ，$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$；$\lambda_2 = 2$ ，$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 。

(2) $f(\mathbf{A})$ 之特徵值爲 $f(1) = 2 \to \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$f(\mathbf{A})$ 之特徵值爲 $f(2) = 3 \to \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(3) $f(\mathbf{A})$ 之特徵值爲 $f(\lambda)$ ！

本份解完！