附錄　推導二項式選擇權評價模式

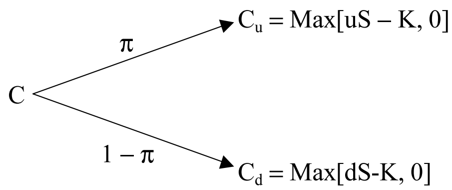
在統計學中的二項式分配（binomial distribution）是指可以重複進行相互獨立的實驗，但其實驗的出象（outcome）都只有成功與失敗兩種，且每次實驗成功或失敗的機率皆相同。依二項式的概念假設目前的股價（S）到了下一期只有兩種可能的走勢：一為上漲至uS，二為下跌至dS，又上漲至uS的預期機率為π，下跌至dS的預期機率為$(1-\pi)$。

現假設有甲、乙兩個投資組合，各組合的內容分別為：

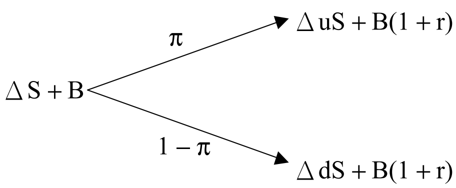
甲投資組合：持有一單位買權，價值為C。

乙投資組合：持有Δ單位的股票（目前股價＝S）以及價值為B的無風險債券。投資組合價值＝$\Delta S+B$

若期初甲、乙兩個投資組合的價值相等，即$C=\Delta S+B$，則基於無套利機會的觀念，二者期末的價值也必定相等。C_u為股價上漲至uS時的買權履約價值，C_d為股價下跌至dS時的買權履約價值，又履約價格為K，無風險利率為r，則甲、乙兩個投資組合價值的變化如下圖所示。



甲投資組合



乙投資組合

由無套利機會的觀念可知，投資組合的期初價值若是相等，則到期時的價值亦應相同。換言之，當期末股價上漲至uS時，甲、乙兩個投資組合的價值必須相等，可得公式（A-1）；相反的，若期末股價下跌至dS，

則可得公式（A-2），如下所示。

$$C_u = \Delta uS + B(1+r) \tag{A-1}$$

$$C_d = \Delta dS + B(1+r) \tag{A-2}$$

進一步可得公式（A-1）及公式（A-2）的聯立解：

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S} \tag{A-3}$$

$$B = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+r)} \tag{A-4}$$

將計算出的Δ及B代回期初的條件：

$$C = \Delta S + B$$

$$= \frac{C_u - C_d}{u-d} + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+r)}$$

$$= \frac{\dfrac{1+r-d}{u-d}C_u + \dfrac{u-1-r}{u-d}C_d}{1+r}$$

令 $p = \dfrac{1+r-d}{u-d}$ ，可得公式（A-5）如下：

$$\text{買權價值}(C) = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{1+r} \tag{A-5}$$

我們可以注意到p值恆介於0與1之間，與機率的特性相同，故稱p為風險中立的機率（risk-neutral probability）。在導入風險中立的機率值後，便可捨棄個人主觀認定的預期機率（π），由公式（A-5）中看出，買權的價值與預期機率（π）並無相關，故不論投資人對於股價走勢預測是否同質，其計算所得之選擇權價值皆應相同。這一點與我們直觀的看法似乎有些不同，通常我們會認為預期股價上漲的機率較大，則買權的價值應該較高；若股價上漲機率較小，則買權價值應該較低。但由風險中立情況下所得之選擇權價值可知，個人主觀認定標的股票漲跌的預期機率並不影響買權價值，原因是預期未來股價會上漲或下跌的機率早已反映在目前的股價上，所以在進行選擇權評價工作時，也就不須再重複去考量了。