

一、古典機率概論

● 定義 A.1

觀測樣本的過程，稱作實驗 (experiment)。若有一實驗滿足下列三個條件：

- (1) 實驗所有可能結果，皆為已知。
- (2) 在未試行實驗前，實驗的結果不可預知。
- (3) 在相同的狀況下，實驗可重複試行。

則稱此實驗為隨機實驗 (random experiment)。



● 定義 A.2：樣本空間

隨機實驗所有可能的結果所成的集合，稱之為樣本空間 (sample space)。



Remark

- (1) 樣本空間中的元素，稱做樣本點 (sample point)。
- (2) 樣本空間的每一樣部分集合，稱做事件 (event)；即對於樣本空間 Ω ，若 $A \subseteq \Omega$ ，則 A 是一個事件。

所以由定義 A.1 我們可知如何對隨機現象的測量下定義。而由定義 A.2 則進一步將測量的結果表達成較為具體的集合，接下來的問題就是要來測量這些集合的大小。通常衡量機率的方法，有下列四種：

- (1) 古典機率 (Laplace 提出)
- (2) 經驗機率 (Von Mises 提出)
- (3) 主觀機率 (T. Bayes 提出)
- (4) 機率公理體系 (Kolmogorov 提出)

分述如下：

1-4 機率論

定義 A.3

定義 $n(A) \equiv A$ 集合中元素的總數，則定義

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \dots\dots (1)$$

式(1)中所定義的機率即為古典機率。



Remark!

(1) 古典機率的基本性質：

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} P(\phi) = 0 ; P(\Omega) = 1 \\ \textcircled{2} \text{若 } A \subseteq B, \text{ 則 } P(A) \leq P(B) \\ \textcircled{3} \forall A \subseteq \Omega, 0 \leq P(A) \leq 1 \\ \textcircled{4} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ \textcircled{5} P(A^c) = 1 - P(A) \end{array} \right.$$

(2) 可將定義A.3中的古典機率加以推廣，即定義

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \dots\dots (2)$$

其中 $m(A)$ 代表幾何測度

即 $m(A)$ 在一維的情況下為長度

二維的情況下為面積

三維的情況下為體積

而式(2)中所定的機率，即為幾何機率。

◀ 例題 A.1 ▶

Let E & F be mutually exclusive events in the sample space of an experiment. Suppose that the experiment is repeated until either event E or event F occurs. What does the sample space of the new super experiment look like?

(台科大企研所)

解答

設樣本空間 $\Omega = E \cup F \cup A$ ，且 E 、 F 、 A 兩兩互斥
則實驗停止的狀況有下列兩種：

(case 1) E 在 F 前先出現，則定義 $\Omega_1 = \{A^k E | k = 0, 1, 2, \dots\}$

其中 $A^k E \equiv$ 前 k 次出現 A ，第 $(k+1)$ 次出現 E 的事件。

(case 2) F 在 E 前先出現，則定義 $\Omega_2 = \{A^k F | k = 0, 1, 2, \dots\}$

其中 $A^k F \equiv$ 前 k 次出現 A ，第 $(k+1)$ 次出現 F 的事件。

則新實驗的樣本空間 $\Omega' = \Omega_1 \cup \Omega_2$ 。

Remark!

若 $P(E) = p_1, P(F) = p_2 (P(A) = 1 - p_1 - p_2)$

且假設每次試行獨立，則

$$P(A^k E) = (1 - p_1 - p_2)^k p_1$$

$$P(A^k F) = (1 - p_1 - p_2)^k p_2$$

$$\therefore P(\Omega_1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A^k E)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p_1 - p_2)^k p_1 = \frac{p_1}{p_1 + p_2}$$

$$P(\Omega_2) = \frac{p_2}{p_1 + p_2}$$

◀ 例題 A.2 ▶

In tossing a fair of dice independently and separately. What is the Probability of getting a sum of 7 before a sum of 4? (成大統研所)

解答

定義 $E \equiv$ 投擲二公正骰子，擲到點數和為 "7" 的事件。

$F \equiv$ 投擲二公正骰子，擲到點數和為 "4" 的事件。

$A \equiv$ 投擲二公正骰子，擲到點數和為非 "4" 和非 "7" 的事件。

1-6 機率論

$$\text{則 } P(E) = \frac{1}{6}, P(F) = \frac{1}{12}, P(A) = \frac{3}{4}$$

$$\text{則所求事件： } \Omega_1 = \{A^k E | k = 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\therefore P(\Omega_1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A^k E) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

◀ 例題 A.3 ▶

甲、乙、丙三人輪流投擲一銅板，甲先投，接著乙，然後丙，再回到甲……，如此不斷地重複，直到有人得到正面，遊戲停止，最先得到正面的是贏家。

(1) 寫出這隨機實驗的樣本空間並說明。

(2) 根據①的寫法，用集合表示下列事件。

① 甲贏 (事件 A)

② 乙贏 (事件 B)

③ $(A \cup B)^c$

(3) 假設每次投擲出正面的機率是 p ，計算每人贏的機率。

(清大統研所)

解答

(1) 設 $T \equiv$ 投擲銅板，擲到反面的事件

$H \equiv$ 投擲銅板，擲到正面的事件

$$\Omega = \{T^{3k}H, T^{3k+1}H, T^{3k+2}H | k = 0, 1, 2, \dots\}$$

其中 $T^m H \equiv T \dots T H$
 m 次

$$(2) \textcircled{1} \Omega_1 = \{T^{3k}H | k = 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\textcircled{2} \Omega_2 = \{T^{3k+1}H | k = 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\textcircled{3} \Omega_3 = \{T^{3k+2}H | k = 0, 1, 2, \dots\}$$

$$(3) \text{甲贏} = P\{T^{3k}H | k=0,1,2,\dots\} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{3k} p = \frac{p}{1-(1-p)^3}$$

$$\text{乙贏} = P\{T^{3k+1}H | k=0,1,2,\dots\} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{3k+1} p = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^3}$$

$$\text{丙贏} = P\{T^{3k+2}H | k=0,1,2,\dots\} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{3k+2} p = \frac{p(1-p)^2}{1-(1-p)^3}$$

◀ 例題 A.4 ▶

假設一轟炸機的目標是一個半徑為一英哩的圓的中心，一枚炸彈會隨機地落在這個圓內的任一點，而炸彈會催毀在落入 $\frac{1}{2}$ 英哩範圍內的所有物品，則炸一次目標被催毀的機率有多大？（清大工工所）

解答

$$\because \Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}, A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$$

$$\therefore \text{所求} = P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

$$= \frac{\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi} = \frac{1}{4}$$

◀ 例題 A.5 ▶

Three point A, B, C are independent and uniformly distributed on a circle with its center at O . Find the probability that the center O lies in the interior of triangle $\triangle ABC$. （清大應數所）

解答

於 $\triangle ABC$ 中，定義 $\angle A = x, \angle B = y \Rightarrow \angle C = \pi - x - y$

$$\text{則 } \Omega = \{(x, y) | 0 < x, y < \pi, 0 < \pi - x - y < \pi\}$$

1-8 機率論

$$= \{(x, y) | 0 < x, y < \pi, 0 < x + y < \pi\}$$

設事件 $D \equiv$ 圓心 O 落在 $\triangle ABC$ 中的事件

$$\text{則 } D = \left\{ (x, y) \left| 0 < x, y < \frac{\pi}{2}, 0 < \pi - x - y < \frac{\pi}{2} \right. \right\}$$

$$= \left\{ (x, y) \left| 0 < x, y < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x + y < \pi \right. \right\}$$

$$\therefore P(D) = \frac{m(D)}{m(\Omega)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2} \times \pi \times \pi} = \frac{1}{4}$$

◀ 例題 A.6 ▶

On a line of length $2L$, a point is randomly selected from the first half, and then independently another point is randomly selected from the second half. What is the probability that the distance between these two points is great than $\frac{L}{3}$? (清大統研所)

解答

$$\Omega = \{(x, y) | 0 < x < L, L < y < 2L\}, \quad A = \{(x, y) | y - x > \frac{L}{3}\}$$

$$\text{則利用幾何機率, } P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{L^2 - \frac{\left(\frac{L}{3}\right)^2}{2}}{L^2} = \frac{17}{18}$$

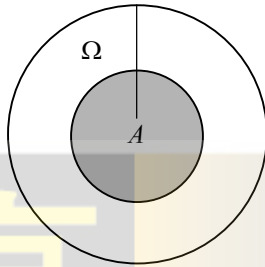
◀ 例題 A.7 ▶

A point is selected at random inside a circle. What is the probability that the point is closer to the center than to circumference?

(政大統研所)

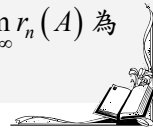
解答

$$\text{如圖，則所求} = P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^2}{\pi \times a^2} = \frac{1}{4}$$



● 定義 A.4：經驗機率 

令 $r_n(A)$ 為事件 A 在 n 次試行的相對頻率，則定義 $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(A)$ 為事件 A 的經驗機率。



◀ 例題 A.8 ▶

投擲一骰子 100 次，得到下列結果：

點數	1	2	3	4	5	6
次數	10	20	14	16	18	22

試求擲到奇數點的機率？

解答

$$A = \{1, 3, 5\}, \therefore r_{100}(A) = \frac{10 + 14 + 18}{100} = 0.42$$

所以由經驗機率，可知 $P(A) = 0.42$ 。

● 定義 A.5：主觀機率 

決策者主觀對機率的認定，稱主觀機率。



二、集合概論

定義 B.1

假設 $A, B \subseteq \Omega$ ，則定義

(1) 聯集 (union of the set A & B)

$$A \cup B = \{\omega | \omega \in A \text{ or } \omega \in B\}$$

(2) 交集 (intersection of the set A & B)

$$A \cap B = \{\omega | \omega \in A \text{ and } \omega \in B\}$$

(3) 補集合 (complement of the set A)

$$A^c = \{\omega | \omega \in \Omega, \text{ and } \omega \notin A\}$$

(4) 差集合 (difference of the set A & B)

$$A - B = \{\omega | \omega \in A \text{ and } \omega \notin B\}$$

(5) 對稱差集 (symmetric difference of the set A & B)

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

(6) 空集合 (empty set)

$$\phi = \{ \} \quad (\text{無元素集合})$$

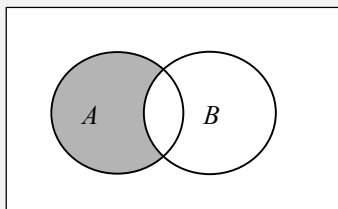
(7) 加集合 (additivity of the set A & B)

若集合 A & B ，滿足 $A \cap B = \phi$ ，則定義

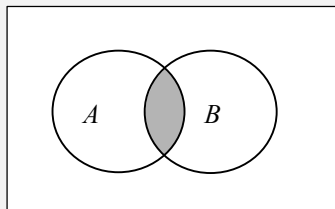
$$A + B = A \cup B$$

Remark

可由文氏圖 (Venn diagram) 來探討上述關係：



$A - B$



$A \cap B$