

Chapter 8



馬可夫鏈

馬可夫鏈是俄國科學家Andrei Markov(1859-1922)所創立的一種特殊型態的機率問題，可以推測未來的出象，而且也是一種特殊的差分方程式。大多數常見在管理科學模式的應用以及管理數學的技術，馬可夫鏈是依據現有資訊做為預測和面對未來之用。雖然馬可夫理論最早是用以預測在實驗室條件下的氣體行為，卻在商業和社會科學方面有很多有用且有趣的應用。例如：消費者購物的品牌換用的過去記錄，以及目前產品群的市場占有率以及各產品的最終市場占有率。進一步我們可以預測機器部門的機器情況、訓練方案中受訓人員的績效和很多其他類似的情況的預測。

8.1 隨機過程(Stochastic process)

一、統計相關概念

定義8.1

隨機現象

一種實驗(Experiment)試行(Trial)一次，其出現無規律，試行多次即漸有規律，此種現象稱為隨機現象(Random Phenomena)。

定義8.2

隨機實驗(Random experiment)

若一實驗滿足下列特性則稱該實驗為隨機實驗：

1. 在實驗前無法預知實驗的結果。
2. 知道實驗的所有結果。
3. 在相同的狀況下可以重複實驗。

定義8.3

樣本空間(Sample space)

隨機實驗下的每一實驗結果稱樣本點或出象，而所有隨機實驗的結果所形成的集合，稱樣本空間。

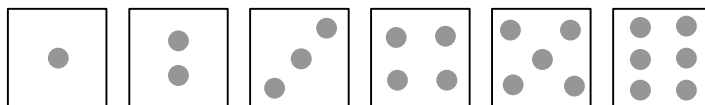
定義8.4

隨機變數(Random variable)

將樣本空間的每一個元素轉變成數字的一個函數。

若投擲一粒公正的骰子，其出現的點數會有六種情況，欲表達此公正骰子出現點數為5點的機率為何？應如何表達呢？

首先將點數六種情況繪出



令 x 為投擲骰子出現的點數

$$x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

此時，即可利用 $P(x=5) = \frac{1}{6}$ ，表示出現5點的機率，故 x 稱為隨機變數。

二、隨機過程(Stochastic Process)

即這些隨機變數所形成的集合。在隨機過程定義一個有下標之隨機變數的集合 $\{x_t\}$ ，其中下標 t 在給定的集合 T 之內演進。 T 是一個非負整數的集

合，而 x_t 代表在時間 t 時一種可衡量的特性。

若投擲一粒公正的骰子，其出現的點數會有六種情況：

樣本空間： $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

此時，隨著時間的演進，可以將骰子進行第一次，第二次，……，第 n 次，……投擲，因此隨機變數必須修改成可以用來表達時間先後順序，即 x_t 表示第 t 次投擲出現的點數。

經過第一次，第二次，……等試行，可得

隨機過程： $\{x_t\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots\} = \{6, 3, 4, 3, 2, 6, 5, \dots\}$

三、隨機過程分類

(一)若狀態 $0, 1, 2, \dots, M$ 有 $M+1$ 個狀態， M 值為有限，我們稱之為有限狀態隨機過程； M 值為無限，我們稱之為無限狀態隨機過程。

1. 有限狀態隨機過程：

投擲骰子問題：

令 x_t 表示第 t 次投擲出現的點數

$x_t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\{x_t\}$ 可視為一個有限狀態隨機過程。

2. 無限狀態隨機過程：

銀行等候系統：

令 x_t 表示第 t 天在銀行系統的顧客人數

$x_t \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\{x_t\}$ 可視為一個無限狀態隨機過程。

(二)若特定時間點 $t = 1, 2, 3, \dots$ ，為離散時間，我們稱之為離散時間隨機過程，若特定時間點 t 為不可分割值，我們稱之為連續時間隨機過程。

1. 離散時間隨機過程：

投擲骰子問題：

令 x_t 表示第 t 次投擲出現的點數

$x_t \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

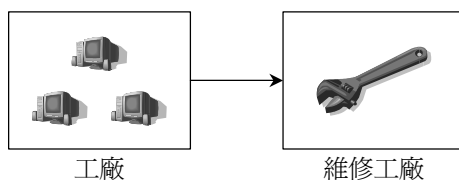
此時 $t = 1, 2, 3, 4, \dots$

$\{x_t\}$ 可視為一個離散時間隨機過程。

2. 連續時間隨機過程：

8-4 作業研究

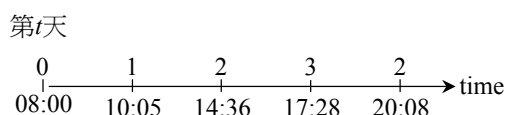
電腦維修廠問題：



令 x_t 表示時間點 t 時維修工廠內的電腦數目

$$x_t \in \{0, 1, 2, 3\}$$

此時



我們無法以離散時間來描述此問題。

故 $\{x_t\}$ 可視為一個連續時間隨機過程。詳細模式推導會在9.1節說明。

8.2 馬可夫鏈

一個隨機過程 $\{x_t\} (t=0, 1, 2, \dots)$ ，若此過程具有馬可夫性質，此隨機過程我們稱之為馬可夫鏈。

$\{x_t\}$ + 馬可夫性質 = 馬可夫鏈

定義8.5

馬可夫性質(Markovian property)

【數學式】

$$P\{x_{t+1} = j \mid x_t = i, x_{t-1} = i_{t-1}, \dots, x_0 = i_0\} = P\{x_{t+1} = j \mid x_t = i\}$$

【概念】

在時間 $t+1$ 時的狀態僅與在時間 t 時的狀態相關，而與已過去時間 $t-1, \dots, 0$ 之狀態無關。