自序

數理統計學是理工商管學院相關領域在進行數據分析與決策的核心工具，無論是學術研究或實務應用，都需要以堅實的統計理論作為基礎。數理統計學更是各校統計所、應用數學所與數據科學所的必考科目，筆者為幫助考生及有興趣鑽研統計學的讀者掌握這門重要學科，特撰寫本書，期望能成為讀者備考與研究的路上之強力後盾。

本書依筆者超過十年之教學經驗及分析歷年各校命題趨勢，將分為六章系統講解：第一章抽樣分配、第二章點估計、第三章決策理論、第四章評估準則、第五章區間估計、第六章假設檢定。各章節均包含重要定義與定理，部份重要定理的推導與相關題型之詳細解析，所有解答皆力求步驟清晰、邏輯嚴謹，避免過度使用艱深數學技巧，讓讀者能循序漸進建立統計思維。

特別提醒讀者，研讀統計學需注重「理解→推導→應用」三階段：建議先掌握各章核心概念（如充分統計量、最大似然估計等），再通過範例練習培養解題直覺，最後結合實務數據集進行綜合演練。書中每題均標注難易度指數，讀者可依自身進度安排學習計畫。

筆者在撰寫過程中雖力求嚴謹，仍難免有疏漏之處，懇請各界先進不吝指正，未來再版時將逐一修正，務求提供最精准的參考內容。本書得以順利出版，特別感謝高點出版部同仁在排版與視覺設計上的專業協助，使複雜的數學公式都能夠清晰呈現。

謹以本書獻給始終支持我的家人，你們的陪伴都是筆者持續精進的動力。

趙治勳
2025.7

第一章　抽樣分配

第一節　統計量(Statistic)

《定義1.1》【統計量】

設 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是由隨機變數 X 的分配中抽出之一組樣本，則樣本函數 $T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 稱為統計量(statistic)。

【Remark】

1. 統計量為一個樣本的函數，其中不能包含母體未知參數，但它的分配可以包含。

   常用之統計量有：

   背景: 母體：$X\sim(\mu,\sigma^2)$

   樣本: $X_1,X_2,\cdots,X_n$

   統計量：樣本平均數 $\overline{X}=\dfrac{\sum X_i}{n}$

   樣本變異數 $S^2=\dfrac{\sum(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$ 或 $\dfrac{\sum(X_i-\overline{X})^2}{n}$

   或 $\dfrac{\sum(X_i-\mu)^2}{n}$ 〔其中 μ 已知〕

   順序統計量 $X_{(i)},i=1,2,\cdots,n$

   背景: 母體：$X\sim Ber(p)$

   樣本: $X_1,X_2,\cdots,X_n\overset{iid}{\sim}Ber(p)$

   統計量：樣本成功之總次數為 $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim Bin(n,p)$

   樣本成功比例：$\hat{p}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$

2. 統計量對於樣本資料進行整理，故它包含了對母體未知參數進行估計的能力。

3. 統計量的標準差$\sqrt{V[T(X_1,X_2,\cdots,X_n)]}$稱為標準誤(standard error)。

《定義1.2》【隨機樣本】

由隨機變數 X 的分配中，以抽後放回之方式抽取一組樣本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$， 故樣本間相互獨立且服從相同分配，則稱這組樣本為隨機樣本(random sample)。

母體：r.v. $X \sim f_X(x)$

樣本：$X_1,X_2,\cdots\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} f_X(x)$

統計量：g($X_1,X_2,\cdots\cdots,X_n$)~ $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 抽樣分配

【Remark】

1. 何謂抽樣分配（sampling distribution）？

   統計量所服從的機率分配稱為抽樣分配。

2. 樣本是隨機變數。

3. 在隨機樣本下，樣本之間相互獨立且皆服從母體分配。

   〔random sample特性〕

4. 統計量是樣本之函數，因此計量也是隨機變數。

5. 統計量之抽樣分配不一定服從母體分配。

6. 尋找統計量之抽樣分配：

   方法一：把所有可能的樣本結果列出來再計算統計量之抽樣分配。

   方法二：在滿足某些條件下，某一個特定統計量之抽樣分配。

第二章　點估計

《定義2.1》【估計量】

設 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是由隨機變數 X 的分配中抽出之一組樣本，有統計量 $T=T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$。若以 T 作為估計母體未知參數 θ，則稱 $\hat{\theta}=T$ 為 θ 之估計量(estimator)，在實際獲得樣本資料 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 後，則稱 $\hat{\theta}=T(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 為 θ 之估計量值(estimate)。

例：設 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是由常態母體 $N(\mu,\sigma^2)$（μ 未知）中抽出之一組隨機樣本，若以樣本平均數 $\overline{X}$ 估計母體平均數 μ 的話，$\overline{X}$ 稱為 μ 之估計量(estimator)，而 $\overline{x}$ 稱為 μ 之估計量值(estimate)。

【Remark】

1. 因為估計量必為統計量，故估計量必為隨機變數，但是統計量就不一定是估計量。

2. 估計方法：

   (1)點估計(point estimation)，即 $\hat{\theta}\xrightarrow{估計}\theta$。

   以一個估計量去估計一個母體未知參數，這種估計方法稱為點估計。

   (2)區間估計(interval estimation)，即 $(L,U)\xrightarrow{估計}\theta$ 之可能範圍。

   利用估計量的抽樣分配，在考慮信賴水準(confidence level)下， 建立一個信賴區間(confidence interval)，再以此區間去估計母體未知參數的可能範圍。

接下來，我們就想要知道有什麼合理的方法可以找到母體未知參數 θ 之估計量 $\hat{\theta}$，方法有：(一)動差估計量 MME

(二)最大概似估計量 MLE

(三)貝氏估計量

(四)EM演算法 (AI演算法常用)

(五)最小平方法 (數學建模)

《定義2.2》【動差估計法(也稱為矩估計法)】

利用r階的樣本原動差等於r階的母體原動差，進而找到各母體未知參數之動差估計量(method of moments estimator，簡稱MME)。

$$\text{令}\quad \frac{\sum_i X_i^r}{n} = E(X^r) \quad \Rightarrow \hat{\theta}_{MME}$$

【Remark】

1. r取多少?

 若母體中有k個未知參數須估計的話，"通常" 需要用到第1階至第k階之原動差去求得MME。

2. 動差估計量不一定存在。

 當母體分配之原動差不存在時，MME就不會存在，例：柯西分配。

3. 由弱大數法則 WLLN 得知 $\frac{\sum X_i^r}{n} \xrightarrow{p} E(X^r)$。

 證明：$X_1, X_2, \cdots, X_n \overset{iid}{\sim} (\mu, \sigma^2)$，$E(X^r) < \infty$，$V(X^r) < \infty$

 故 $E(\frac{\sum X_i^r}{n}) = E(X^r)$ 與 $V(\frac{\sum X_i^r}{n}) = \frac{V(X^r)}{n}$。

 $\lim_{n\to\infty} P(|\frac{\sum X_i^r}{n} - E(X^r)| \geq \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{V(X^r)}{n\varepsilon^2} = 0$，故 $\frac{\sum X_i^r}{n} \xrightarrow{p} E(X^r)$。

精選範例

《例3.1》

設$X_1,X_2,\cdots,X_n$是從$Ber(p)$之母體中抽取之一組隨機樣本，在考慮二次損失函數之下，試求出以下兩個估計量之風險函數，並就風險函數進行比較？

$$\hat{p}_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\qquad \hat{p}_2=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i+\sqrt{\frac{n}{4}}}{n+\sqrt{n}}$$

難度：★★☆

【解】$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim Bin(n,p)$

因為$E(\hat{p}_1)=E(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n})=p$，　$V(\hat{p}_1)=V(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n})=\frac{p(1-p)}{n}$

$$R(p,\hat{p}_1)=MSE(\hat{p}_1)=V(\hat{p}_1)+[p-E(\hat{p}_1)]^2=\frac{p(1-p)}{n}$$

因為$E(\hat{p}_2)=E(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i+\sqrt{\frac{n}{4}}}{n+\sqrt{n}})=\frac{np+\sqrt{\frac{n}{4}}}{n+\sqrt{n}}$，

$$V(\hat{p}_2)=V(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i+\sqrt{\frac{n}{4}}}{n+\sqrt{n}})=\frac{np(1-p)}{(n+\sqrt{n})^2}$$

$$R(p,\hat{p}_2)=MSE(\hat{p}_2)=V(\hat{p}_2)+[p-E(\hat{p}_2)]^2=\frac{n}{4(n+\sqrt{n})^2}=\frac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2}$$

討論：

$$\frac{R(p,\hat{p}_1)}{R(p,\hat{p}_2)}=\frac{4p(1-p)(\sqrt{n}+1)^2}{n}=p(1-p)[4(1+\frac{1}{\sqrt{n}})^2]>1$$

故滿足$p(1-p)>[4(1+\frac{1}{\sqrt{n}})^2]^{-1}=l$表示決策函數$\hat{p}_2$較$\hat{p}_1$優越（$\hat{p}_2$可接受的admissible），當$n\uparrow\Rightarrow l\uparrow$表示$\hat{p}_1$更容易比$\hat{p}_2$優越，其中$\hat{p}_1$為$p$之MME及MLE。

《例3.2》

設 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是從 $N(\mu, \sigma^2)$ 之母體中抽取之一組隨機樣本，在考慮二次損失函數之下，試求出 σ^2 之估計量 $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$ 之風險函數？並說明 S^2 比c S^2 是可接受的(admissible)。（其中 $c > 1$）

難度：★★☆

【解】已知 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

$$E(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}) = (n-1) \Rightarrow E(S^2) = \sigma^2 \text{ 與}$$

$$V(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}) = 2(n-1) \Rightarrow V(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$$R((\mu,\sigma^2), S^2) = MSE(S^2) = V(S^2) + [\sigma^2 - E(S^2)]^2 = \frac{2}{n-1}\sigma^4$$

$$E(cS^2) = c\sigma^2 \quad \text{與 } V(cS^2) = \frac{2c^2\sigma^4}{n-1}$$

$$R((\mu,\sigma^2), cS^2) = MSE(cS^2) = V(cS^2) + [\sigma^2 - E(cS^2)]^2$$

$$= \frac{2c^2\sigma^4}{n-1} + [\sigma^2 - c\sigma^2]^2 = \frac{2c^2 + (1-c)^2(n-1)}{n-1}\sigma^4$$

當 $c > 1$ 時，因 $R((\mu,\sigma^2), S^2) < R((\mu,\sigma^2), cS^2)$，故 S^2 是可接受的(admissible)。

<補充>

$S^2_{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ 與 $S^{2*}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}$ 那一個MSE較小？

$$cS^2_{n-1} = \frac{n-1}{n}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n} = S^{2*}_n$$

$$\because c = \frac{n-1}{n} < 1$$

第六章　假設檢定

當研究者根據研究目的先建立一個有關母體未知參數之假設值，再利用樣本提供的證據，且考慮機率原理下，合理地判斷假設是否成立，這種推論統計方法稱為假設檢定(hypothesis testing)。

第一節　假設檢定概論

《定義6.1》【H_0, H_1】

設母體未知參數$\theta \in \Theta$，若把參數空間Θ分為兩個互斥空間Θ_0, Θ_1，即$\Theta = \Theta_0 + \Theta_1$。研究者認為懷疑或不合理而希望拒絕之假設，稱為虛無假設(null hypothesis)，以$H_o : \theta \in \Theta_0$表示之。而研究者希望找證據來驗證之假設，稱為對立假設(alternative hypothesis)，以H_1或$H_a : \theta \in \Theta_1$表示之。

【Remark】

1. 設立H_o及H_1之準則，即把你想要找證據拒絕的事件放在H_o，反言之，把你想要找證據驗證的事件放在H_1。

   例1：你懷疑別人的宣稱是否成立，你去進行實驗，此時應該把別人宣稱的事件放在H_o。

   例2：某人作出一些宣稱後，然後自己去進行實驗，此時應該把宣稱的事件放在H_1。

   例3：有人向公部門投訴某工廠生產之產品品質，公部門對於該產品進行檢驗，但公部門在進行檢驗時應該站在工廠一方的立場，這是因為公平單位須先假設犯人無罪下，找證據證明犯人有罪，因此把工廠宣稱的品質規格放在H_o。

2. H_o, H_1為兩個相對互斥的假設。

例：$H_0:\mu=1 vs H_1:\mu=3$，$H_0:\mu\le 1 vs H_1:\mu>1$，$H_0:\mu\ge 1 vs H_1:\mu<1$，$H_0:\mu=1 vs H_1:\mu\ne 1$，$H_0:\mu=1\bigcap\sigma^2\le 2 vs H_1:\mu\ne 1\bigcup\sigma^2>2$，$H_0:A\bigcup B vs H_1:A^c\bigcap B^c$

3. 為什麼"="通常都會在虛無假設H_o呢？

為了計算檢定統計量，以利於透過顯著水準進行檢定。

其中 檢定統計量(test statistics，T.S.)為H_o為真下之樞紐量。

《定義6.2》【簡單假設，複合假設】

若在假設(H_o或H_1)成立之下，母體分配只有一種型態，這種統計假設稱為簡單假設(simple hypothesis)。若在假設(H_o或H_1)成立之下，母體分配有很多種型態，即不僅一種，這種統計假設稱為複合假設(composite hypothesis)。

【Remark】

母體：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 其中σ^2已知

簡單假設：$H_o:\mu=2$ v. s. $H_1:\mu=3$ （簡單對簡單）

複合假設：$H_o:\mu\le 2$ v. s. $H_1:\mu>2$ （複合對複合）

$H_o:\mu\ge 2$ v. s. $H_1:\mu<2$ （複合對複合）

$H_o:\mu=2$ v. s. $H_1:\mu\ne 2$ （簡單對複合）

$H_o:\mu=2$ v. s. $H_1:\mu<2$ （簡單對複合）

《定義6.3》【拒絕域，臨界點】

決定一個臨界點(critical value)後，再以臨界點之上下範圍以區分拒絕H_o及接受H_o之範圍。其中決定拒絕H_o之範圍稱為拒絕域(rejection region，R.R.)。而接受H_o之範圍稱為接受域(accept region，A.R.)。

【Remark】

1. 單尾檢定(single tailed test):

 (1)左尾檢定(left-tailed test)　R.R.只在左邊

 $H_o: \mu \geq 2$ v.s. $H_1: \mu < 2$

 (2)右尾檢定(right-tailed test)　R.R.只在右邊

 $H_o: \mu \leq 2$ v.s. $H_1: \mu > 2$

2. 雙尾檢定(two tailed test)

 $H_o: \mu = 2$ v.s. $H_1: \mu \neq 2$　R.R.在左右兩邊

3. 臨界點(critical value)係透過型Ⅰ誤差及型Ⅱ誤差之觀念來決定的

《定義6.4》【型Ⅰ誤差，型Ⅱ誤差】

H_o 為真之下而錯誤拒絕 H_o，這種錯誤稱為型Ⅰ誤差(type I error)。

H_1 為真之下而錯誤接受 H_o（不拒絕 H_o），這種錯誤稱為型Ⅱ誤差(type Ⅱ error)。

【Remark】

1. 型Ⅰ誤差機率：

 $\alpha = P(拒絕H_0 \mid H_0為真)$，當 H_o 為真之下而錯誤拒絕 H_o 的機率。

 型Ⅱ誤差機率：

 $\beta = P(接受H_0 \mid H_1為真)$，當 H_1 為真之下而錯誤接受 H_o 的機率。

2.

檢定結果 / 真實	拒絕 H_o	接受 H_o
H_o 為真	型Ⅰ誤差 α	信賴水準 $1-\alpha$
H_1 為真	power=$1-\beta$	型Ⅱ誤差 β