例題 4

X is a Bernoulli random variable with $P(X)=0.4$.

(1) Derive $E(X^3)$.

(2) Derive $E(X^k)$ for $k>0$.

(3) Derive skewness of X. （102台科大企管20%）

Sol：

(1) $E(X^3)=\sum_{x=0}^{1}x^3\cdot f(x)=(0)^3\times 0.6+(1)^3\times 0.4=0.4$

(2) $E(X^k)=\sum_{x=0}^{1}x^k\cdot f(x)=(0)^k\times 0.6+(1)^k\times 0.4=0.4$

(3)因 $\mu_1'=E(X)=0.4$，$\mu_2'=E(X^2)=0.4$，$\mu_3'=E(X^3)=0.4$，所以

$\mu_2=\mu_2'-\mu_1'=0.4-(0.4)^2=0.24$

$\mu_3=\mu_3'-3\mu_2'\cdot\mu_1'+2(\mu_1')^3=0.4-3(0.4)(0.4)+2(0.4)^3=0.048$

所以偏態係數為

$$\beta_1=\frac{\mu_3}{(\sqrt{\mu_2})^3}=\frac{0.048}{(\sqrt{0.24})^3}\doteqdot 0.4082$$

5.3 二項分配

一、二項試驗之意義

滿足下列性質之試驗稱之爲二項試驗，即

(一)此試驗由 n 次相互獨立且完全相同之試行所構成。

(二)每次試行皆有二種互斥的結果，稱之爲“成功”和“失敗”。

(三)每次試行成功的機率爲 p 皆維持不變。

而二項隨機變數 X 即表示 n 次伯努利試行中成功次數，且其分配稱之爲二項分配（binomial distribution）。

二、二項分配之推導

根據二項試驗可導出二項分配。首先考慮 n 次獨立試行中，一特定次序中具有 x 次成功與 $n-x$ 次失敗之現象如下

$$\underbrace{S\cap S\cap S\cap\cdots\cap S}_{x}\cap\underbrace{F\cap F\cap\cdots\cap F}_{n-x}$$

但因每次試行皆互相獨立，故可利用獨立的原理將各次結果之機率相乘，且因每次成功之機率為 p ，每次失敗之機率為 $1-p$ ，故可知此特定次序之機率為

$$\begin{aligned}
&P(\overbrace{\underbrace{S\cap S\cap S\cap\cdots\cap S}_{x}\cap\underbrace{F\cap F\cap\cdots\cap F}_{n-x}}^{n})\\
&=P(S)P(S)\cdots P(S)P(F)P(F)\cdots P(F)\\
&=p\cdot p\cdots p\cdot(1-p)\cdot(1-p)\cdots(1-p)\\
&=p^x(1-p)^{n-x}
\end{aligned}$$

又上述 n 次獨立試行中“x”次成功之順序，共有 $\binom{n}{x}$ 種互斥之排列結果，故在 n 次獨立試行中，成功 x 次之機率為

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

定義3

設 X 為間斷隨機變數，若其機率質量函數為

$$f(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} & ，x=0,1,2,\ldots,n\\ 0 & ，其他\end{cases}$$

則稱 $f(x)$ 為具有參數 n 及 p 的二項分配，記為 $X\sim b(n,p)$ 。

Remark

在計算二項分配之特徵數，常需利用二項展開式，即

$$(a+b)^n=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}a^x b^{n-x}=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}a^{n-x}b^x$$

讀者要熟悉此公式。

例題 5

A certain type of tomato seed germinates 90% of the time. A backyard farmer planted 15 seeds. $P(x)=\dfrac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$

(1) Find the probability that 13 or fewer germinate.

(2) Find the probability that 13 or more germinate.

(3) Find the probability that exactly 5 seeds do not germinate.

（102元智國企12%）

Sol：

(1) 設隨機變數 X 表示15個中發芽個數，且 $X\sim b(15,0.9)$ ，則

$$P(X\le 13)=\sum_{x=0}^{13}\binom{15}{x}(0.9)^x(0.1)^{15-x}=0.451$$

(2) $P(X\ge 13)=\sum_{x=13}^{15}\binom{15}{x}(0.9)^x(0.1)^{15-x}=0.816$

(3) 5顆沒發芽即表示10顆發芽，故其機率為

$$P(X=10)=\binom{15}{10}(0.9)^{10}(0.1)^5=0.01$$

例題 6

The probability that any child in a certain family will have blue eyes is 1/4, and this feature is inherited independently by different children in the family. If there are five children in the family and it is known that at least one of these children has blue eyes, what is the probability that at least three of the children have blue eyes?

（政大金融、台大商研、清大經濟10%）

Sol：

設隨機變數 X 表示5個小孩中具有藍眼睛之人數，則 $X \sim b\left(5, \frac{1}{4}\right)$，

故 $P(X \geq 3 | X \geq 1) = \dfrac{P(X \geq 3)}{P(X \geq 1)} = \dfrac{\sum_{x=3}^{5} \binom{5}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}}{\sum_{x=1}^{5} \binom{5}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}}$

$$= \frac{\binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0}{1 - \binom{5}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^5}$$

$$= 0.1357$$

例題 7

The lifetime (in hours), X, of a certain electronic component is a random variable with a probability density function given by

$$f(x) = \frac{1}{100} e^{\frac{-1}{100}x} \quad , x > 0$$

Four of these components operate independently in a piece of equipment. The equipment fails if at least two of the components fail. Find the probability that the equipment operates for at least 200 hours without failure.　（政大財管、清大工工、中央資管）

Sol：

任一電子組件之壽命至少200小時之機率為

$$P(X \geq 200) = \int_{200}^{\infty} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} dx = \left[-e^{-\frac{x}{100}} \right]_{200}^{\infty} = e^{-2}$$

令隨機變數 W 表示四個電子組件中壽命至少200個小時之個數，則 $W \sim b(4, e^{-2})$，故此裝備至少可使用200小時之機率為

$$P(W \geq 3) = \binom{4}{3}(e^{-2})^3(1-e^{-2})^1 + \binom{4}{4}(e^{-2})^4(1-e^{-2})^0 = 0.0089$$

三、二項分配之特徵值

定理3

設隨機變數 X 為具有參數 n 及 p 的二項分配，則

$$E(X)=np \text{ ；} Var(X)=np(1-p) \text{ ；} M_X(t)=(1-p+pe^t)^n \text{ ；}$$

（元智資管、100台大國企、101中央經濟、102交大財金、102交大管科）

【證明】

$$E(X)=\sum_{x=0}^{n} x\cdot\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$$

$$=\sum_{x=1}^{n}\frac{n!}{(x-1)!\,(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$$

$$=np\sum_{x=1}^{n}\binom{n-1}{x-1}p^{x-1}(1-p)^{n-x} \qquad \text{（令 } y=x-1 \text{）}$$

$$=np\sum_{y=0}^{n-1}\binom{n-1}{y}p^{y}(1-p)^{n-1-y}=np\big(p+(1-p)\big)^{n-1}=np$$

又 $E[X(X-1)]=\sum_{x=0}^{n} x(x-1)\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$

$$=\sum_{x=2}^{n}\frac{n!}{(x-2)!\,(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$$

$$=n(n-1)p^2\sum_{x=2}^{n}\binom{n-2}{x-2}p^{x-2}(1-p)^{n-x} \qquad \text{（令} y=x-2 \text{）}$$

$$=n(n-1)p^2\sum_{y=0}^{n-2}\binom{n-2}{y}p^{y}(1-p)^{n-2-y}$$

$$=n(n-1)p^2\big(p+(1-p)\big)^{n-2}=n(n-1)p^2$$

所以 X 的變異數為

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=E\big[X(X-1)\big]+E(X)-[E(X)]^2$$

$$=n(n-1)p^2+np-(np)^2=np(1-p)$$

又 X 的動差母函數為

$$M_X(t)=E[e^{tX}]=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$
$$=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^x(1-p)^{n-x}$$
$$=[1-p+pe^t]^n=[q+pe^t]^n$$

Remark

1. 上述定理3之 $E(X)$ 及 $Var(X)$ 亦可利用m.g.f導數求得（參見習題）。

2. 設 $X\sim b(n,p)$，若 n 固定，則

(1) $p<\dfrac{1}{2}$，二項分配為右偏分配。

(2) $p>\dfrac{1}{2}$，二項分配為左偏分配。

(3) $p=\dfrac{1}{2}$，二項分配為對稱分配。

3. 二項分配之近似分配

(1)當 $n\to\infty$ 且 $p\to 0$ 時，二項分配機率可由卜瓦松分配近似。

(2)當 $n\to\infty$，二項分配機率可由常態分配近似。

例題 8

If the probability that a child is a son is p, where $0<p<1$, find the expected number of sons in a family with n children, given that there is at least one son.　（交大工工、102交大管科）

Sol：

設隨機變數 X 表示家庭 n 個小孩中兒子之人數，則 $X\sim b(n,p)$，又

$$f(x\mid X\ge 1)=\frac{f(x)}{P(X\ge 1)}=\frac{\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}}{1-(1-p)^n}\quad，x=1,2,3,\ldots,n$$

故知在 $X\ge 1$ 條件下，X 之期望值為

$$E(X \mid X \geq 1) = \sum_{x=1}^{n} x \cdot f(x \mid X \geq 1) = \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{\dfrac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}}{1-(1-p)^n}$$

$$= \frac{1}{1-(1-p)^n} \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \frac{np}{1-(1-p)^n} \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x} \quad （令 y = x-1）$$

$$= \frac{np}{1-(1-p)^n} \sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} p^y (1-p)^{n-1-y}$$

$$= \frac{np}{1-(1-p)^n} (1-p+p)^{n-1} = \frac{np}{1-(1-p)^n}$$

例題 9

Assume the moment generating function of a random variable, X, is $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^t\right)^9$, in the following statements which are correct:

①this is Binomial distribution.

②the distribution is skewed to the right.

③the distribution has fatter tails than normal distribution.

④the variance of the distribution is 2.

(A)①②③　(B)②③④　(C)①③④　(D)①②④.　（元智金融）

Sol：(D)

定理4

設 X 與 Y 為獨立之二項隨機變數，且 $X \sim b(n,p)$，$Y \sim b(m,p)$，則

$$X+Y \sim b(n+m,p)$$

【證明】

因 X 與 Y 皆為二項分配故其動差母函數分別為

$M_X(t)=(q+pe^t)^n$ 及 $M_Y(t)=(q+pe^t)^m$

又 $M_{X+Y}(t)=M_X(t)\cdot M_Y(t)=(q+pe^t)^n(q+pe^t)^m=(q+pe^t)^{n+m}$

故由動差母函數之唯一性知 $X+Y\sim b(n+m,p)$

例題 10

設二項隨機變數 $Y=\sum_{i=1}^{6}X_i\sim b(20,p)$，其中 $\{X_i\}_1^6$ 彼此間獨立，且已知 $X_i\sim b(i,p)$，$i=1,2,3,4,5$。

(1)試求 X_6 之分配（需註明分配名稱及參數）。

(2)求 X_1+X_6 之分配（需註明分配名稱及參數），並計算期望值 $E(X_1+X_6)^2$。（102台大財金15%）

Sol：

(1)因 $X_i\overset{\text{iid}}{\sim}b(i,p)$，$i=1,2,3,4,5$，故知 $\sum_{i=1}^{5}X_i\sim b(15,p)$

今令 $X_6\sim b(m,p)$，所以 $\sum_{i=1}^{5}X_i+X_6\sim b(15+m,p)$，又

$\sum_{i=1}^{6}X_i\sim b(20,p)$，故由二項分配之加法性知 $15+m=20$，

即 $m=5$，即 $X_6\sim b(5,p)$

(2)因 $X_1\sim b(1,p)$，$X_6\sim b(5,p)$ 且 X_1 與 X_6 獨立，

故由二項分配之加法性知 $X_1+X_6\sim b(6,p)$

因 $E[(X_1+X_6)^2]=Var[(X_1+X_6)]+[E(X_1+X_6)]^2$

$$=6p(1-p)+(6p)^2=6p(1+5p)$$

定理5

設隨機變數 X 為具參數 n 及 p 的二項分配，則變量 x 由0至 n 之機率為先遞增後遞減，且眾數為

$$M_o=\begin{cases}[(n+1)p] & \text{，若}(n+1)p\text{不為整數}\\ (n+1)p-1\text{及}(n+1)p & \text{，若}(n+1)p\text{為整數}\end{cases}$$

其中[．]為高斯符號　　（清大工工）

【證明】

因 $X\sim b(n,p)$，今令

$$\frac{P(X=x)}{P(X=x-1)}\ge 1\Rightarrow\frac{\dfrac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}}{\dfrac{n!}{(x-1)!(n-x+1)!}p^{x-1}(1-p)^{n-x+1}}\ge 1$$

$$\Rightarrow\frac{(n-x+1)p}{x(1-p)}\ge 1\Rightarrow x\le(n+1)p \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

$$\frac{P(X=x)}{P(X=x+1)}\ge 1\Rightarrow\frac{\dfrac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}}{\dfrac{n!}{(x+1)!(n-x-1)!}p^{x+1}(1-p)^{n-x-1}}\ge 1$$

$$\Rightarrow\frac{(x+1)(1-p)}{(n-x)p}\ge 1\Rightarrow x\ge(n+1)p-1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

由①,②可知當 $x\le(n+1)p$ 時先遞增，而 $x\ge(n+1)p-1$ 時爲遞減且眾數爲

$$M_o=\begin{cases}[(n+1)p] & \text{，若}(n+1)p\text{不爲整數}\\ (n+1)p-1\text{及}(n+1)p & \text{，若}(n+1)p\text{爲整數}\end{cases}$$

例題 11

一個袋中有20個球，其中黑球有5個，白球有15個，某統計教師決定以10次隨機抽取，抽中黑球數作為本學期「當」掉幾個學生的參考。若每次只抽一個球，令 X 代表抽中之黑球數，則在抽出放回情況下，X 之機率函數為何？該教師最有可能「當」掉幾個學生？

（成大財金15%）

Sol：

隨機變數 X 之機率分配為 $X \sim b\left(10, \frac{1}{4}\right)$，即

$$f(x) = \binom{10}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{10-x} \quad ，x = 0,1,2,...,10$$

又 $(n+1)p = (10+1)\times 0.25 = 2.75$ 不為整數，故眾數為 $M_o = 2$，亦即該教師最有可能當掉2個學生。

5.4 多項分配

前節提過在二項試驗中每次試行皆有兩種互斥結果，但有很多試驗每次試行時，皆不只有二種互斥結果，而是具有二種以上之互斥結果，則此類試驗稱爲多項試驗（multinomial experiment）。

一、多項試驗之意義

滿足下列性質之試驗稱爲多項試驗，即

㈠此試驗由 n 次相互獨立且完全相同的試行所構成。

㈡每次試行皆有 r 種互斥的結果。

㈢每次試行時，第 i 種可能結果出現的機率 p_i 皆維持不變。

而多項隨機變數 X_i 即表示 n 次獨立試行中，第 i 種可能結果出現的次數，$i = 1,2,\ldots,r$。

二、多項分配之推導

多項分配（multinomial distribution）爲二項分配之延伸，因此推導過程大致相同。在 n 次獨立試行中，考慮一個特定次序結果爲具有 D_1 發生 x_1 次，D_2 發生 x_2 次，⋯，D_r 發生 x_r 次之機率爲

$$\begin{aligned}
&P(\underbrace{D_1D_1\cdots D_1}_{x_1}\underbrace{D_2D_2\cdots D_2}_{x_2}\cdots\underbrace{D_rD_r\cdots D_r}_{x_r})\\
&= P(D_1)P(D_1)\cdots P(D_1)P(D_2)P(D_2)\cdots P(D_2)\cdots P(D_r)P(D_r)\cdots P(D_r)\\
&= p_1p_1\cdots p_1p_2p_2\cdots p_2\cdots p_rp_r\cdots p_r\\
&= p_1^{x_1}p_2^{x_2}\cdots p_r^{x_r}
\end{aligned}$$

又上述共有$\begin{pmatrix} n \\ x_1, x_2, \ldots, x_r \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{x_1! \cdot x_2! \cdot \cdots \cdot x_r!}$種互斥結果，故知

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_r = x_r) = \begin{pmatrix} n \\ x_1, x_2, \ldots, x_r \end{pmatrix} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdot \cdots \cdot p_r^{x_r}$$

定義4

設$(X_1, X_2, \ldots, X_r)$為多維隨機變數，若其聯合機率質量函數為

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \begin{pmatrix} n \\ x_1, x_2, \ldots, x_r \end{pmatrix} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_r^{x_r}$$

$$= \frac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_r!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_r^{x_r}$$

則稱此分配為具有參數$(n, p_1, p_2, \ldots, p_r)$的多項分配，其中$\sum_{x=1}^{r} X_i = n$，$\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$。

Remark

1. 在多項分配中針對任一個隨機變數X_i皆服從二項分配，即
   $X_i \sim b(n, p_i)$，$i = 1, 2, \ldots, r$
2. 在多項分配中，當$r = 3$時，則稱為三項分配（trinomial distribution），常記為$(X_1, X_2) \sim tri(n; p_1, p_2)$，且機率分配為
   $$f(x_1, x_2) = \frac{n!}{x_1! x_2! (n - x_1 - x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} (1 - p_1 - p_2)^{n - x_1 - x_2}$$
   其中$x_1, x_2 = 0, 1, 2, \ldots, n$，且$0 \le x_1 + x_2 \le n$
3. 設多維隨機變數$(X_1, X_2, \ldots, X_r)$具有參數$(n, p_1, p_2, \ldots, p_r)$之多項分配，則
   (1) $E(X_i) = np_i$
   (2) $Var(X_i) = np_i(1 - p_i)$
   (3) $Cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$ ，$\forall i \ne j$

例題 12

According to the past experience of Sogo Department Store, 20% of the customers buy PDP TV, 35% of the customers buy LCD TV and 45% of them just "look around". Suppose there are six customers in a given day, what is the probability that the owner of Sogo Department Store sells 2 PDP TV and 3 LCD TV on that day? （98大同資經）

Sol：

設 X 與 Y 分別表示購買PDP及LCD TV之人數，則

$$f(x,y)=\frac{6!}{x!y!(6-x-y)!}(0.2)^x(0.35)^y(0.45)^{6-x-y}\text{，}\begin{array}{l}x,y=0,1,2,\ldots,6\\0\le x+y\le 6\end{array}$$

故知所求事件機率為

$$P(X=2,Y=3)=\frac{6!}{2!\cdot 3!\cdot 1!}(0.2)^2(0.35)^3(0.45)^1=0.046305$$

定理6

設 $(X_1,X_2)\sim tri(n;p_1,p_2)$ ，則

1. $X_2|_{X_1}\sim b\left(n-x_1,\dfrac{p_2}{1-p_1}\right)$
2. $X_1|_{X_2}\sim b\left(n-x_2,\dfrac{p_1}{1-p_2}\right)$

（政大金融、風管、101政大經濟、103交大經管）

【證明】

1. 因 $X_1\sim b(n,p_1)$ ，即

$$f(x_1)=\frac{n!}{x_1!(n-x_1)!}p_1^{x_1}(1-p_1)^{n-x_1}$$

故知 $X_1=x_1$ 下， X_2 之條件分配為

$$f(x_2\mid x_1)=\frac{f(x_1,x_2)}{f(x_1)}$$

$$= \frac{\dfrac{n!}{x_1!x_2!(n-x_1-x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} (1-p_1-p_2)^{n-x_1-x_2}}{\dfrac{n!}{x_1!(n-x_1)!} p_1^{x_1} (1-p_1)^{n-x_1}}$$

$$= \frac{(n-x_1)!}{x_2!(n-x_1-x_2)!} \left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{x_2} \left(1-\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{n-x_1-x_2}$$

即 $X_2|_{X_1} \sim b\left(n-x_1, \dfrac{p_2}{1-p_1}\right)$

2. 同 *1.* 之證明方法。

例題 13

Let the joint distribution of X and Y be trinomial (n, p_1, p_2). Find the correlation coefficient of X and Y.（台大財金、100交大經管10%）

Sol：

因 $Y|_X \sim b(n-x, \dfrac{p_2}{1-p_1})$，$X|_Y \sim b(n-y, \dfrac{p_1}{1-p_2})$，且

$$E(Y|X) = (n-X)\frac{p_2}{1-p_1} = \frac{np_2}{1-p_1} - \frac{p_2}{1-p_1}X$$

$$E(X|Y) = (n-Y)\frac{p_1}{1-p_2} = \frac{np_1}{1-p_2} - \frac{p_1}{1-p_2}Y$$

皆為直線迴歸且斜率分別為 $\dfrac{-p_2}{1-p_1}$，$\dfrac{-p_1}{1-p_2}$，故知

$$\rho^2 = \left(\frac{-p_2}{1-p_1}\right)\left(\frac{-p_1}{1-p_2}\right) = \frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}$$

所以相關係數為

$$\rho = -\sqrt{\frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}} \qquad \text{（因斜率為負）}$$

例題 14

設 X 與 Y 服從三項分配（trinomial distribution），其 p.d.f 為